PROF. LUIS TEIXEIRA
Física | Matemática

FICHA DE MATEMÁTICA

Sistemas de equações

Sistemas do 2º grau

Aluno(a): _____ | **Data:** ___/___/____ | **Prof.:** Luis Teixeira

1. TEORIA

1.1 O que é um sistema do 2º grau

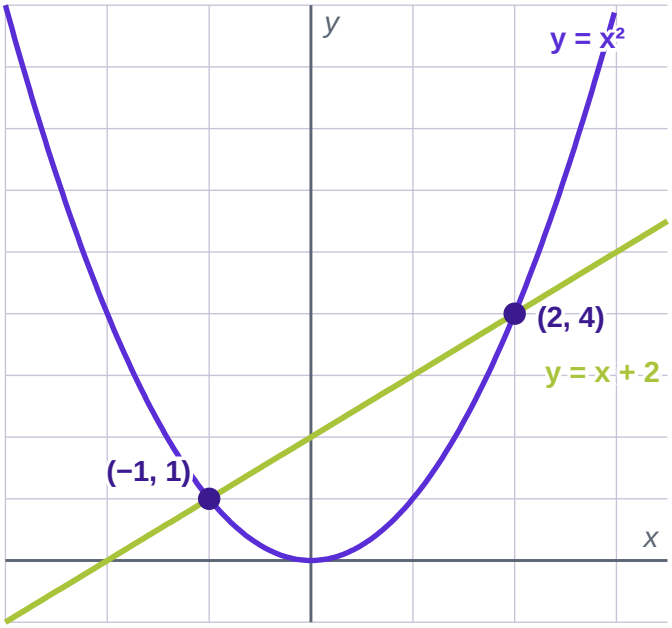
> **DEFINIÇÃO**
> Um sistema de duas equações com duas incógnitas é **do 2º grau** quando pelo menos uma das equações tem termo de grau 2 (x^2, y^2 ou xy). **Resolver** o sistema é encontrar todos os pares ordenados (x, y) que satisfazem as duas equações simultaneamente.

Exemplo: no sistema $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$, o par $(3, 2)$ é solução, pois $3 - 2 = 1$ ✓ e $9 + 4 = 13$ ✓. Já o par $(2, 3)$ não é solução, pois $2 - 3 = -1 \neq 1$; a ordem dos números no par é relevante.

1.2 Interpretação geométrica

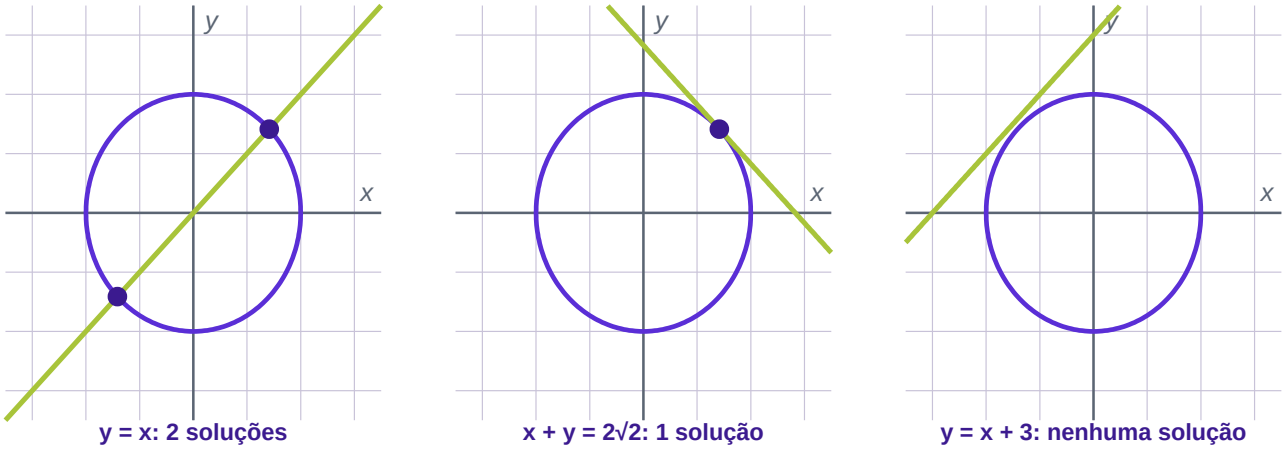
Cada equação com x e y representa uma **curva** no plano cartesiano. As soluções do sistema são os **pontos de intersecção** dessas curvas.

Equação	Curva	Exemplo
$ax + by = c$	reta	$x + y = 7$
$y = ax^2 + bx + c$	parábola	$y = x^2$
$x^2 + y^2 = r^2$	circunferência de centro $(0, 0)$ e raio r	$x^2 + y^2 = 25$ (raio 5)
$xy = k$ $(k \neq 0)$	hipérbole	$xy = 40$



$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$: a reta corta a parábola em dois pontos, então o sistema tem duas soluções, $(-1, 1)$ e $(2, 4)$.

Por isso, um sistema do 2º grau pode ter nenhuma, uma, duas ou até quatro soluções reais, conforme as curvas envolvidas. A figura mostra três posições de uma reta em relação à circunferência $x^2 + y^2 = 4$:



Reta secante (2 soluções), tangente (1 solução) e exterior (nenhuma solução real). Algebricamente, os três casos correspondem, respectivamente, a $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$ na equação do 2º grau obtida após a substituição.

1.3 Método da substituição

1. Na equação mais simples (geralmente a do 1º grau), **isole** uma incógnita.
2. **Substitua** a expressão obtida na outra equação, que se torna uma equação do 2º grau com uma só incógnita.
3. **Resolva** essa equação (por fatoração ou pela fórmula de Bhaskara).
4. **Calcule** a outra incógnita na expressão isolada, para cada valor encontrado.
5. **Escreva** os pares ordenados e confira-os nas duas equações.

Exemplo: $\begin{cases} y = 2x \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. Para $x = 2$, $y = 4$; para $x = -2$, $y = -4$. $S = \{(2, 4),\ (-2, -4)\}$.

1.4 Método da soma e produto

Quando o sistema fornece a soma $S = x + y$ e o produto $P = xy$, os números x e y são as raízes da equação

EQUAÇÃO SOMA-PRODUTO

$$t^2 - S\,t + P = 0$$

Justificativa: a equação $(t - x)(t - y) = 0$ tem raízes x e y. Desenvolvendo o produto: $t^2 - (x + y)t + xy = 0$.

Exemplo: $x + y = 9$ e $xy = 20 \Rightarrow t^2 - 9t + 20 = 0 \Rightarrow t = 4$ ou $t = 5$. As soluções são $(4, 5)$ e $(5, 4)$: como as equações não se alteram quando se trocam x e y, o par invertido também é solução.

IDENTIDADES EM FUNÇÃO DE S E P

- $x^2 + y^2 = S^2 - 2P$
- $(x - y)^2 = S^2 - 4P$
- $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{S}{P}$
- $x^3 + y^3 = S^3 - 3PS$

1.5 Método da adição (eliminação)

É indicado quando os termos em x^2 e em y^2 aparecem nas duas equações. Somando ou subtraindo as equações membro a membro, elimina-se um desses termos.

Exemplo: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$. Somando as equações: $2x^2 = 18 \Rightarrow x = \pm 3$. Substituindo na 1ª: $y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$. Como qualquer combinação de sinais serve, são 4 pares: $(3, 1), (3, -1), (-3, 1), (-3, -1)$.

1.6 Problemas com sistemas

1. Nomeie as incógnitas (por exemplo, x = comprimento e y = largura).
2. Traduza cada informação do texto em uma equação.
3. Resolva o sistema.
4. **Interprete** os resultados, descartando valores incompatíveis com o problema (medida negativa, idade negativa, número não natural quando o texto exige um natural).

ERROS COMUNS

- Calcular só o x e esquecer o y correspondente.
- Esquecer o par invertido em sistemas simétricos: se $(4, 5)$ é solução de $x + y = 9,\ xy = 20$, então $(5, 4)$ também é.
- Em $x^2 = 9$, escrever apenas $x = 3$, esquecendo $x = -3$.
- Supor que $(x + y)^2 = x^2 + y^2$; o correto é $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
- Combinar o x de uma solução com o y de outra.

DICA

Muitas questões pedem apenas o valor de x^2+y^2, $x+y$ ou xy. Nesses casos, as identidades da seção 1.4 levam à resposta sem que seja necessário calcular x e y separadamente.

1.7 Quadro-resumo

Formato do sistema	Método indicado
uma equação do 1º grau + uma do 2º	substituição
$x+y=S$ e $xy=P$	soma e produto: $t^2-St+P=0$
$x+y$ e x^2+y^2 (ou x^3+y^3, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$)	identidades para obter P; depois, soma e produto
$x^2 \pm y^2$ nas duas equações	adição (eliminação)
número de soluções	análise do Δ da equação final (ou esboço das curvas)

2. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exercício resolvido 1. Resolva $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$.

Resolução:

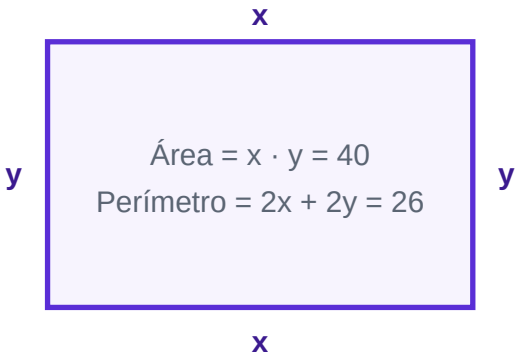
1. **Isolar** na equação do 1º grau: $y=x-1$.
2. **Substituir** na 2ª: $x^2+(x-1)^2=13 \Rightarrow x^2+x^2-2x+1=13 \Rightarrow 2x^2-2x-12=0$.
3. **Simplificar** (dividindo por 2): $x^2-x-6=0 \Rightarrow (x-3)(x+2)=0 \Rightarrow x=3$ ou $x=-2$.
4. **Calcular** y em $y=x-1$ e conferir:

x	$y=x-1$	$x-y$	x^2+y^2
3	2	1 ✓	$9+4=13$ ✓
-2	-3	1 ✓	$4+9=13$ ✓

Resposta: $S=\{(3,2),\ (-2,-3)\}$

Exercício resolvido 2. Um terreno retangular tem perímetro 26 m e área 40 m². Quais são suas dimensões?

Resolução:



1. **Incógnitas:** x = comprimento, y = largura (em metros, positivos).
2. **Equações:** perímetro $2x + 2y = 26 \Rightarrow x + y = 13$; área $xy = 40$.
3. **Soma e produto:** $S = 13$, $P = 40 \Rightarrow t^2 - 13t + 40 = 0$.
4. $\Delta = 169 - 160 = 9 \Rightarrow t = \dfrac{13 \pm 3}{2} \Rightarrow t = 8$ ou $t = 5$.
5. **Conferindo:** $2 \cdot 8 + 2 \cdot 5 = 26$ ✓ e $8 \cdot 5 = 40$ ✓.

Resposta: 8 m por 5 m

Exercício resolvido 3. Resolva $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$ e interprete graficamente.

Resolução:

1. Os segundos membros das duas equações são iguais a y; logo, são iguais entre si (método da comparação): $x^2 = x + 2$.
2. $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -1$.
3. Em $y = x + 2$: $x = 2 \Rightarrow y = 4$; $x = -1 \Rightarrow y = 1$.
4. **Interpretação:** são os dois pontos em que a reta corta a parábola (veja a figura da seção 1.2).

Resposta: $S = \{(-1, 1),\ (2, 4)\}$

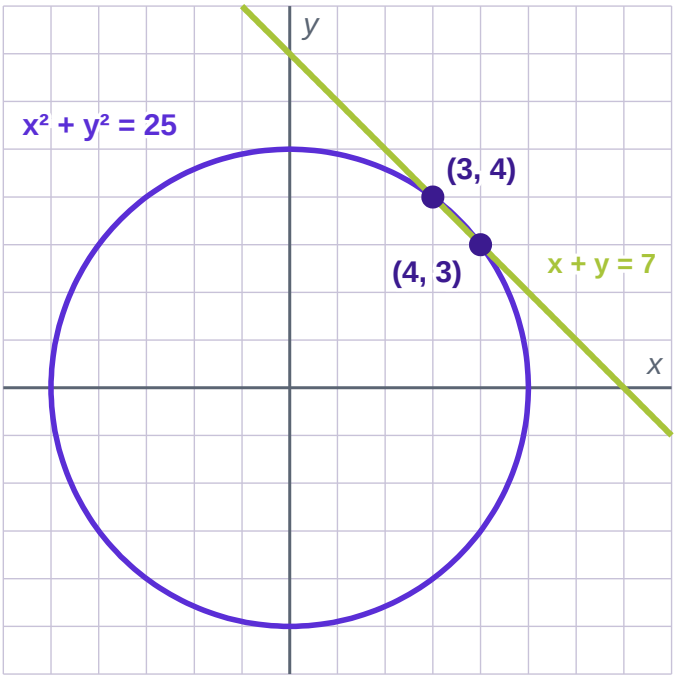
Exercício resolvido 4. Encontre os pontos de intersecção da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ com a reta $x + y = 7$.

Resolução:

1º modo: substituição.

1. $y = 7 - x$. Substituindo: $x^2 + (7 - x)^2 = 25 \Rightarrow 2x^2 - 14x + 49 = 25 \Rightarrow 2x^2 - 14x + 24 = 0$.
2. Dividindo por 2: $x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = 4$.
3. $x = 3 \Rightarrow y = 4$; $x = 4 \Rightarrow y = 3$.

2º modo: identidades. $S = 7$ e $x^2 + y^2 = S^2 - 2P \Rightarrow 25 = 49 - 2P \Rightarrow P = 12$. Então $t^2 - 7t + 12 = 0$, cujas raízes são 3 e 4. O resultado é o mesmo, com menos cálculos.



A reta $x + y = 7$ é secante à circunferência de raio 5 e a corta em dois pontos.

Resposta: $(3, 4)$ e $(4, 3)$

Exercício resolvido 5. Resolva $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$.

Resolução:

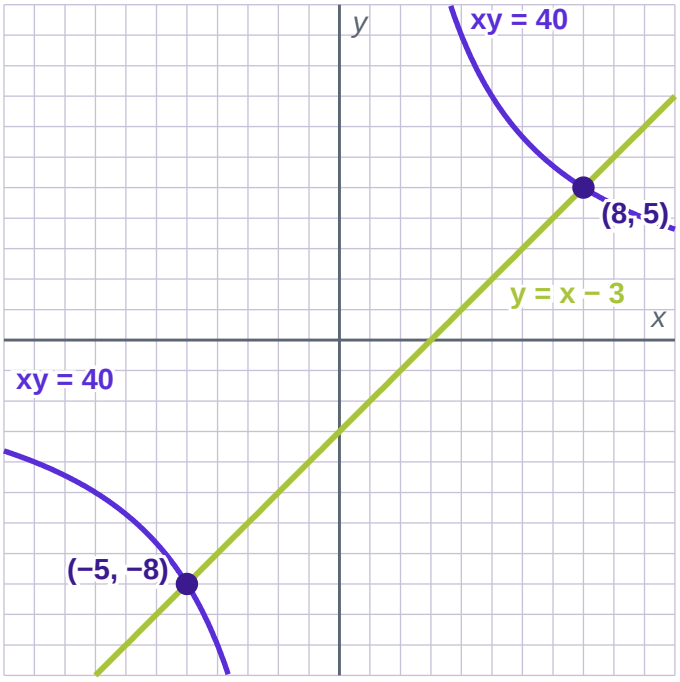
1. **Somando** as equações, o y^2 cancela: $2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$ ou $x = -5$.
2. **Subtraindo** (1ª − 2ª), o x^2 cancela: $2y^2 = 18 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = 3$ ou $y = -3$.
3. Como as equações só envolvem x^2 e y^2, qualquer combinação de sinais satisfaz o sistema: $(\pm 5)^2 + (\pm 3)^2 = 34$ e $(\pm 5)^2 - (\pm 3)^2 = 16$.

Resposta: $S = \{(5, 3),\ (5, -3),\ (-5, 3),\ (-5, -3)\}$

Exercício resolvido 6. A diferença entre dois números é 3 e o produto deles é 40. Quais são os números?

Resolução:

1. **Equações:** $x - y = 3$ e $xy = 40$.
2. **Substituição:** $x = y + 3 \Rightarrow (y + 3)\, y = 40 \Rightarrow y^2 + 3y - 40 = 0$.
3. $\Delta = 9 + 160 = 169 \Rightarrow y = \dfrac{-3 \pm 13}{2} \Rightarrow y = 5$ ou $y = -8$.
4. $y = 5 \Rightarrow x = 8$; $\ y = -8 \Rightarrow x = -5$.
5. **Conferindo:** $8 - 5 = 3$ e $8 \cdot 5 = 40$ ✓; $\ -5 - (-8) = 3$ e $(-5)(-8) = 40$ ✓.



A hipérbole $xy = 40$ tem dois ramos; a reta $y = x - 3$ corta cada ramo em um ponto, um no 1º quadrante e outro no 3º.

Resposta: 8 e 5, ou −5 e −8 (se o problema exigir números positivos, apenas 8 e 5)

Exercício resolvido 7 (nível concurso). Sabendo que $x + y = 5$ e $x^3 + y^3 = 35$, determine x e y.

Resolução:

1. **Identidade do cubo da soma:** $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$, logo $x^3 + y^3 = S^3 - 3PS$.
2. **Substituindo:** $35 = 5^3 - 3P \cdot 5 = 125 - 15P \Rightarrow 15P = 90 \Rightarrow P = 6$.
3. **Soma e produto:** $t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow t = 2$ ou $t = 3$.
4. **Conferindo:** $2 + 3 = 5$ ✓ e $8 + 27 = 35$ ✓.

Resposta: $S = \{(2, 3),\ (3, 2)\}$

3. EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01 Resolva o sistema $\begin{cases} x + y = 9 \\ xy = 20 \end{cases}$.

02 Resolva o sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$.

03 Resolva o sistema $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases}$.

04 Resolva o sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$.

05 A soma de dois números é 15 e o produto é 54. Quais são esses números?

06 Um retângulo tem área $48\ \text{m}^2$ e diagonal 10 m. Determine suas dimensões e seu perímetro.

4. QUESTÕES ESTILO CONCURSO

07 Se $x + y = 10$ e $xy = 21$, o valor de $x^2 + y^2$ é:

(A) 42
(B) 50
(C) 58
(D) 79
(E) 100

08 Sendo x e y números positivos tais que $x - y = 2$ e $xy = 15$, o valor de $x + y$ é:

(A) 6
(B) 7
(C) 8
(D) 9
(E) 10

09 Um retângulo tem perímetro 34 cm e área 60 cm². A medida de sua diagonal, em cm, é:

(A) 12
(B) 15
(C) 17
(D) 13
(E) 10

10 O número de soluções reais do sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x + 3 \end{cases}$ é:

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

11 A soma dos quadrados de dois números naturais consecutivos é 85. O maior desses números é:

(A) 6
(B) 7
(C) 8
(D) 9
(E) 5

12 Se $x+y=6$ e $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4}$, então $|x-y|$ vale:

(A) 1
(B) 3
(C) 4
(D) 6
(E) 2

13 [Desafio] Sendo x e y positivos com $\begin{cases} x^2+xy=12 \\ y^2+xy=24 \end{cases}$, o valor de xy é:

(A) 6
(B) 8
(C) 10
(D) 12
(E) 16

Questões de concursos militares

Questões oficiais de provas anteriores, selecionadas do banco de questões da Trilha Militares.

14 [Escola Naval 2021]

Considere o sistema abaixo:

$$\begin{cases} y^2+u^2+v^2+w^2=4x-1 \\ x^2+u^2+v^2+w^2=4y-1 \\ x^2+y^2+v^2+w^2=4u-1 \\ x^2+y^2+u^2+w^2=4v-1 \\ x^2+y^2+u^2+v^2=4w-1 \end{cases}$$

Se $x=a$, $y=b$, $u=c$, $v=d$ e $w=e$ constituem a solução do sistema, assinale a opção que apresenta a soma $a+b+c+d+e$.

(A) $\frac{5}{2}$
(B) $\frac{2}{7}$
(C) $\frac{1}{7}$
(D) $\frac{1}{4}$
(E) $\frac{2}{3}$

5. GABARITO COMENTADO

Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.
07	C	08	C	09	D	10	A
11	B	12	E	13	B		

Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.
14	A						

▼ 01 a 06 – Fixação

01. $t^2 - 9t + 20 = 0 \Rightarrow t = 4$ ou 5. $S = \{(4,5),\ (5,4)\}$.

02. $y = 5 - x \Rightarrow x^2 + (5-x)^2 = 17 \Rightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou 4. $S = \{(1,4),\ (4,1)\}$.

03. $x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou -1. $S = \{(2,4),\ (-1,1)\}$.

04. Somando: $2x^2 = 18 \Rightarrow x = \pm 3$; $y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$. $S = \{(3,1),\ (3,-1),\ (-3,1),\ (-3,-1)\}$.

05. $t^2 - 15t + 54 = 0 \Rightarrow t = 6$ ou 9. Os números são 6 e 9.

06. $xy = 48$ e $x^2 + y^2 = 100$ (Pitágoras). $(x+y)^2 = 100 + 96 = 196 \Rightarrow x + y = 14$. $t^2 - 14t + 48 = 0 \Rightarrow 6$ e 8. Dimensões 6 m e 8 m; perímetro 28 m.

▼ 07 a 13 – Estilo concurso

07 (C). $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 100 - 42 = 58$.

08 (C). $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy = 4 + 60 = 64 \Rightarrow x + y = 8$, pois x e y são positivos. De fato, $x = 5$ e $y = 3$.

09 (D). $x + y = 17$, $xy = 60 \Rightarrow$ lados 5 e 12. Diagonal: $\sqrt{25 + 144} = 13$.

10 (A). $x^2 + (x+3)^2 = 4 \Rightarrow 2x^2 + 6x + 5 = 0$; $\Delta = 36 - 40 = -4 < 0 \Rightarrow$ nenhuma solução real.

11 (B). $n^2 + (n+1)^2 = 85 \Rightarrow n^2 + n - 42 = 0 \Rightarrow n = 6$ (descarta-se -7, que não é natural). O maior número é 7.

12 (E). $\dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow xy = 8$. $t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow 2$ e $4 \Rightarrow |x - y| = 2$.

13 (B). Somando: $x^2 + 2xy + y^2 = 36 \Rightarrow (x+y)^2 = 36 \Rightarrow x + y = 6$. Da 1ª: $x(x+y) = 12 \Rightarrow x = 2$; logo $y = 4$ e $xy = 8$.

▼ 14 a 14 – Concursos militares

14 (A) · Escola Naval 2021.

Somando as cinco equações, cada quadrado aparece quatro vezes:

$$4\sum x^2 = 4\sum x - 5 \ \Rightarrow\ \sum(4x^2 - 4x + 1) = 0 \ \Rightarrow\ \sum(2x-1)^2 = 0$$

Então todas as incógnitas valem $\frac{1}{2}$ (e de fato satisfazem o sistema: $4 \cdot \frac{1}{4} = 1 = 4 \cdot \frac{1}{2} - 1$). A soma é $\frac{5}{2}$.