PROF. LUIS TEIXEIRA
Física | Matemática

FICHA DE MATEMÁTICA

Sistemas de equações

Sistemas do 1º grau

Aluno(a): _____ | **Data:** ___/___/____ | **Prof.:** Luis Teixeira

1. TEORIA

1.1 O que é um sistema do 1º grau

DEFINIÇÃO

Um **sistema do 1º grau com duas incógnitas** é um conjunto de duas equações do 1º grau que devem ser satisfeitas simultaneamente:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

A **solução** do sistema é um par ordenado (x, y) que torna as duas equações verdadeiras.

Exemplo: no sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$, o par $(3, 2)$ é solução, pois $3 + 2 = 5$ ✓ e $3 - 2 = 1$ ✓. Já o par $(4, 1)$ satisfaz a primeira ($4 + 1 = 5$), mas não a segunda ($4 - 1 = 3 \neq 1$); portanto, não é solução.

OBSERVAÇÃO

Uma única equação, como $x + y = 5$, tem infinitas soluções: $(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), \ldots$ A segunda equação acrescenta uma condição: entre todos esses pares, interessam apenas os que também a satisfazem.

1.2 Método da substituição

PASSO A PASSO

1. **Isole** uma incógnita em uma das equações (de preferência a que tem coeficiente 1 ou -1).
2. **Substitua** essa expressão na outra equação, obtendo uma equação com uma só incógnita.
3. **Resolva** essa equação.
4. **Calcule** a outra incógnita, substituindo o valor encontrado na expressão isolada.
5. **Confira** o par nas duas equações.

Exemplo: $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$. Da 2ª equação, $x = 1 + y$. Substituindo na 1ª: $1 + y + y = 5 \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2$. Então $x = 1 + 2 = 3$. Solução $(3, 2)$.

1.3 Método da adição

PASSO A PASSO

1. Escreva as equações na forma $ax + by = c$, com os termos em x e em y alinhados.
2. Se necessário, **multiplique** uma das equações (ou as duas) por números convenientes, de modo que os coeficientes de uma das incógnitas fiquem opostos (por exemplo, $+3y$ e $-3y$).
3. **Some** as equações membro a membro, eliminando essa incógnita.
4. **Resolva** a equação obtida e substitua o valor em uma das equações para encontrar a outra incógnita.

A adição é válida porque, se $A = B$ e $C = D$, então $A + C = B + D$: somam-se quantidades iguais aos dois membros. Além disso, multiplicar todos os termos de uma equação por um número diferente de zero não altera suas soluções.

Exemplo: $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$. Somando as equações: $2x = 6 \Rightarrow x = 3$; substituindo na 1ª: $3 + y = 5 \Rightarrow y = 2$.

1.4 Método da comparação

Isola-se a mesma incógnita nas duas equações e igualam-se as expressões obtidas. O método é conveniente quando as duas equações já estão na forma $y = \ldots$

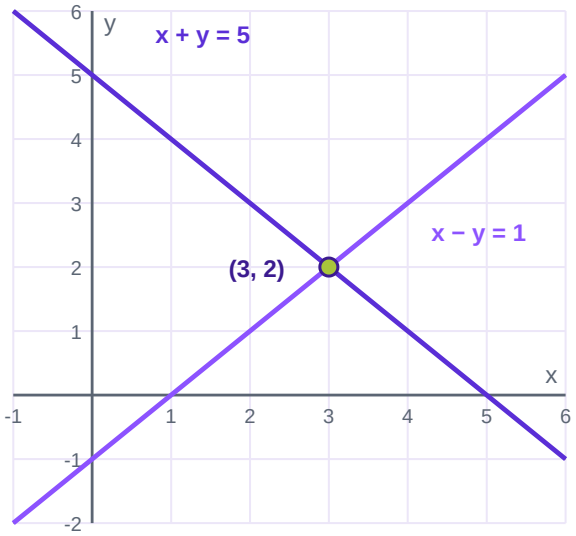
Exemplo: de $y = 5 - x$ e $y = x - 1$, temos $5 - x = x - 1 \Rightarrow 6 = 2x \Rightarrow x = 3$ e, portanto, $y = 2$.

DICA: ESCOLHA DO MÉTODO

- Se alguma incógnita tem coeficiente 1 ou -1, use a **substituição**.
- Se os coeficientes de uma incógnita são iguais ou opostos (ou fáceis de igualar), use a **adição**.
- Se as duas equações já estão na forma $y = \ldots$, use a **comparação**.
- Se houver frações, multiplique antes cada equação pelo MMC dos seus denominadores.

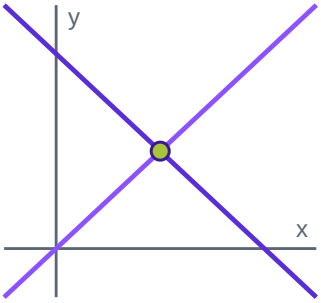
1.5 Interpretação gráfica

Cada equação do 1º grau com duas incógnitas é representada por uma **reta** no plano cartesiano. A solução do sistema é o **ponto em comum** das duas retas.

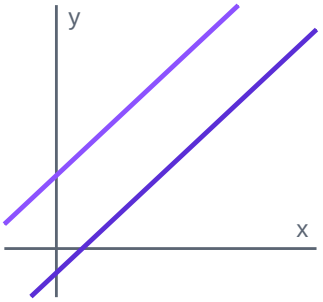


As retas $x + y = 5$ e $x - y = 1$ se cortam no ponto $(3, 2)$, que é a solução do sistema.

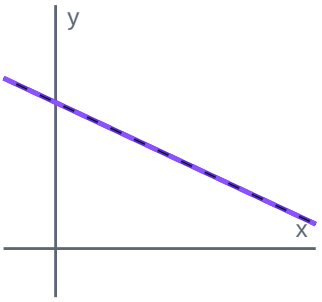
Duas retas no plano podem ser **concorrentes**, **paralelas** ou **coincidentes**. Por isso, um sistema pode ter uma, nenhuma ou infinitas soluções:



Concorrentes: SPD
uma solução



Paralelas: SI
nenhuma solução



Coincidentes: SPI
infinitas soluções

1.6 Classificação pelos coeficientes

Também é possível classificar o sistema sem construir o gráfico, comparando as razões entre os coeficientes de $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$:

Condição	Retas	Classificação	Soluções
$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	concorrentes	SPD (possível e determinado)	uma única
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	paralelas	SI (impossível)	nenhuma
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	coincidentes	SPI (possível e indeterminado)	infinitas

Justificativa. Se as razões $\frac{a_1}{a_2}$ e $\frac{b_1}{b_2}$ são iguais, os primeiros membros das duas equações são proporcionais, e as retas têm a mesma inclinação. Se os segundos membros seguem a mesma proporção, a 2ª equação é a 1ª multiplicada por uma constante, e as retas coincidem; caso contrário, as retas são paralelas e distintas.

Exemplo: $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \neq \frac{3}{10}$ ⇒ **SI**. Resolvendo por adição (1ª equação multiplicada por -2 e somada à 2ª), obtém-se $0 = 4$, uma igualdade falsa.

> **ERROS COMUNS**
>
> - Na adição, multiplicar só um dos membros da equação. Todos os termos dos dois membros devem ser multiplicados.
> - Omitir os parênteses ao substituir: $x = 1 + y$ em $2x - y$ resulta em $2(1 + y) - y$.
> - Calcular x e encerrar a resolução. A solução é o par (x, y); além disso, verifique o que o problema pede: uma das incógnitas, as duas ou uma expressão com ambas.
> - Ao obter $0 = 0$, concluir que a solução é zero. Uma igualdade sempre verdadeira, como $0 = 0$, indica infinitas soluções (SPI); uma igualdade falsa, como $0 = 4$, indica que não há solução (SI).

1.7 Montando sistemas a partir de problemas

No texto	Na equação
"a soma de dois números é 20"	$x + y = 20$
"a diferença entre eles é 4"	$x - y = 4$
"um é o triplo do outro"	$x = 3y$
"daqui a 5 anos" / "há 5 anos"	$x + 5$ / $x - 5$ (para cada pessoa)
"número de dois algarismos ab"	$10a + b$ (invertido: $10b + a$)
quantidades e valores (ingressos, notas)	uma equação para a **quantidade** e outra para o **valor**

1.8 Quadro-resumo

Método	Quando usar	Ideia
Substituição	coeficiente ± 1	isolar uma incógnita e substituir na outra equação
Adição	coeficientes opostos ou fáceis de igualar	somar para eliminar uma incógnita
Comparação	duas equações $y = \ldots$	igualar as expressões
Retas concorrentes: SPD · retas paralelas: SI · retas coincidentes: SPI		

2. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exercício resolvido 1 (substituição). Resolva $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$.

Resolução:

1. **Isole x:** na 1ª equação, x tem coeficiente 1; logo, $x = 8 - 2y$.
2. **Substitua na 2ª**, usando parênteses: $3(8 - 2y) - y = 3$.
3. **Resolva:** $24 - 6y - y = 3 \Rightarrow -7y = -21 \Rightarrow y = 3$.
4. **Calcule x:** $x = 8 - 2 \cdot 3 = 2$.
5. **Confira:** $2 + 2 \cdot 3 = 8$ ✓ e $3 \cdot 2 - 3 = 3$ ✓.

Resposta: $S = \{(2, 3)\}$

Exercício resolvido 2 (adição direta). Resolva $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 5x - 3y = 9 \end{cases}$.

Resolução:

1. Os coeficientes de y já são opostos ($+3y$ e $-3y$).
2. **Some** membro a membro: $(2x + 5x) + (3y - 3y) = 12 + 9 \Rightarrow 7x = 21 \Rightarrow x = 3$.
3. **Substitua** na 1ª: $2 \cdot 3 + 3y = 12 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2$.
4. **Confira:** $6 + 6 = 12$ ✓ e $15 - 6 = 9$ ✓.

Resposta: $S = \{(3, 2)\}$

Exercício resolvido 3 (adição com multiplicação). Resolva $\begin{cases} 3x + 2y = 16 \\ 2x + 5y = 18 \end{cases}$.

Resolução:

1. Nenhum coeficiente é ± 1, e não há coeficientes opostos. Para eliminar x, usamos o MMC de 3 e 2, que é 6.
2. Multiplique a 1ª por 2 e a 2ª por -3:

$$\begin{cases} 6x + 4y = 32 \\ -6x - 15y = -54 \end{cases}$$

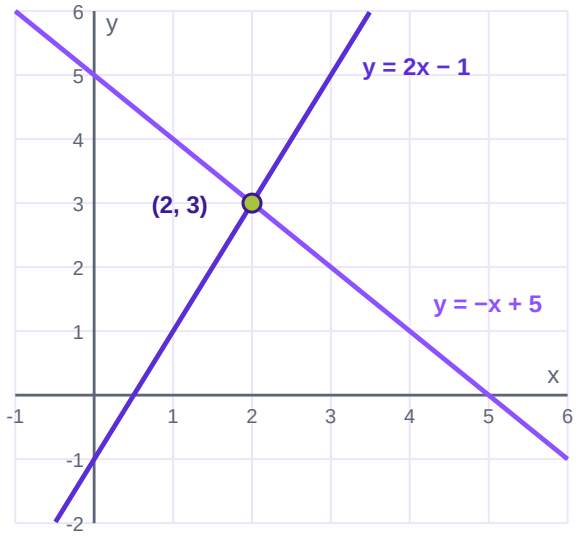
3. **Some:** $-11y = -22 \Rightarrow y = 2$.
4. **Substitua** na 1ª equação original: $3x + 4 = 16 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$.
5. **Confira:** $12 + 4 = 16$ ✓ e $8 + 10 = 18$ ✓.

Resposta: $S = \{(4, 2)\}$

Exercício resolvido 4 (comparação e gráfico). Resolva $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -x + 5 \end{cases}$ e interprete no plano cartesiano.

Resolução:

1. As duas equações já fornecem y; igualando as expressões: $2x - 1 = -x + 5$.
2. $2x + x = 5 + 1 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$.
3. Em qualquer uma das equações: $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ (na outra, $-2 + 5 = 3$ ✓).
4. **Interpretação:** as retas têm inclinações diferentes (2 e -1), logo, são concorrentes e se cortam em um único ponto, $(2, 3)$:

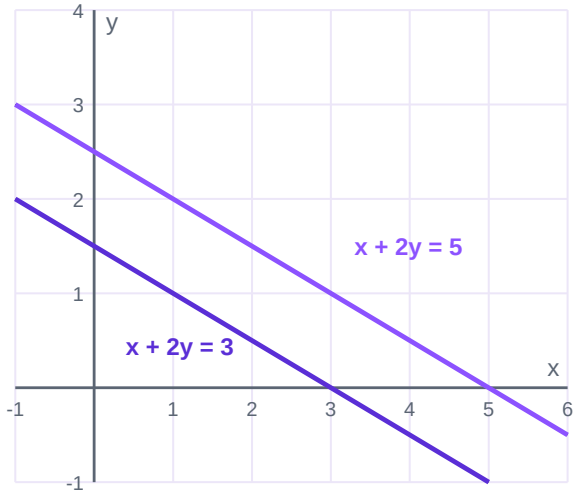


Resposta: $S = \{(2, 3)\}$ **(sistema possível e determinado)**

Exercício resolvido 5 (classificação). Classifique os sistemas: a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$

Resolução:

1. **a)** Razões: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, mas $\frac{3}{10} \neq \frac{1}{2}$. As retas são paralelas, e o sistema é **SI**. Algebricamente: dividindo a 2ª equação por 2, obtemos $x + 2y = 5$; como $x + 2y$ não pode valer 3 e 5 ao mesmo tempo, o sistema não tem solução.
2. **b)** Razões: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$. A 2ª equação é a 1ª multiplicada por 2; as duas representam a mesma reta, e o sistema é **SPI**. As soluções são todos os pares com $x = 3 - 2y$, como $(3, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 2)$...



Sistema (a): as retas $x + 2y = 3$ e $x + 2y = 5$ são paralelas e nunca se encontram.

Resposta: a) SI (sem solução); b) SPI (infinitas soluções)

Exercício resolvido 6 (ingressos). Num show foram vendidos 500 ingressos: inteiras a R$ 40,00 e meias a R$ 20,00. A arrecadação foi R$ 16.000,00. Quantas inteiras e quantas meias foram vendidas?

Resolução:

1. **Incógnitas:** i = nº de inteiras, m = nº de meias.
2. **Equação da quantidade:** $i + m = 500$. **Equação do valor:** $40i + 20m = 16000$.
3. **Simplifique** a 2ª dividindo por 20: $2i + m = 800$.
4. **Adição:** subtraindo a 1ª da 2ª: $(2i + m) - (i + m) = 800 - 500 \Rightarrow i = 300$.
5. **Calcule** m: $m = 500 - 300 = 200$.
6. **Confira:** $40 \cdot 300 + 20 \cdot 200 = 12000 + 4000 = 16000$ ✓.

Resposta: 300 inteiras e 200 meias

Exercício resolvido 7 (idades). Hoje, um pai tem o triplo da idade do filho. Daqui a 10 anos, terá o dobro. Quais são as idades atuais?

Resolução:

1. **Incógnitas:** p = idade do pai hoje, f = idade do filho hoje.
2. **Hoje:** $p = 3f$.
3. **Daqui a 10 anos**, cada um terá 10 anos a mais: $p + 10 = 2(f + 10)$.
4. **Substitua** $p = 3f$: $3f + 10 = 2f + 20 \Rightarrow f = 10$, e $p = 30$.
5. **Confira:** daqui a 10 anos, terão 40 e 20 anos, e $40 = 2 \cdot 20$ ✓.

Resposta: pai 30 anos, filho 10 anos

Exercício resolvido 8 (nível concurso – algarismos). Um número de dois algarismos tem soma dos algarismos igual a 9. Invertendo a ordem dos algarismos, o número aumenta 27. Qual é o número?

Resolução:

1. **Representação:** se o algarismo das dezenas é a e o das unidades é b, o número vale $10a + b$ (por exemplo, $36 = 10 \cdot 3 + 6$). Com os algarismos invertidos, o número vale $10b + a$.
2. **Equações:** $a + b = 9$ e $10b + a = 10a + b + 27$.
3. **Simplifique** a 2ª: $9b - 9a = 27 \Rightarrow b - a = 3$.
4. **Adição** com $a + b = 9$: $2b = 12 \Rightarrow b = 6$, e $a = 3$.
5. **Confira:** o número é 36; invertido, 63; e $63 - 36 = 27$ ✓.

Resposta: 36

3. EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01 Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + 4y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 4 \\ x - y = 3 \end{cases}$

02 Classifique (SPD, SI ou SPI): a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

03 Num quintal há galinhas e coelhos: são 30 cabeças e 80 pés. Quantos são de cada tipo?

04 Tenho 25 notas, umas de R$ 5,00 e outras de R$ 10,00, somando R$ 190,00. Quantas notas tenho de cada valor?

05 3 cadernos e 2 canetas custam R$ 34,00; 2 cadernos e 5 canetas custam R$ 30,00. Qual é o preço de cada caderno e de cada caneta?

06 Determine k para que o sistema $\begin{cases} 2x + ky = 5 \\ 4x + 6y = 1 \end{cases}$ seja impossível.

4. QUESTÕES DE CONCURSOS MILITARES

Questões oficiais de provas anteriores (EFOMM, EPCAR, EsPCEx, AFA e Escola Naval), selecionadas do banco de questões da Trilha Militares.

07 [EsPCEx 2024]

Rafael fez uma pesquisa de preços para a aquisição de uma TV, de um aparelho de som e de um celular. Terminada a pesquisa, constatou que pagaria: - R$ 1.900,00 por uma TV e um aparelho de som; - R$ 1.700,00 por um celular e um aparelho de som; e - R$ 2.000,00 por uma TV e um celular. Rafael decidiu comprar somente o celular, pagando por esta compra o valor de:

(A) R$ 850,00
(B) R$ 900,00
(C) R$ 950,00
(D) R$ 1.000,00
(E) R$ 1.050,00

08 [EFOMM 2023]

Considere um grupo de 40 alunos da EFOMM cuja média de notas na monografia é de 8,6 pontos. A nota média dos alunos de máquinas é de 9,5 pontos. Por outro lado, a média das notas dos alunos de Náutica é de 8,0 pontos. A quantidade de alunos de Máquinas nesse grupo é

(A) 14
(B) 16
(C) 18
(D) 20
(E) 22

09 [EPCAR 2024]

Uma confeitaria vende bombons variando os recheios: uva ou morango. Três bombons recheados de morango custam tanto quanto dois bombons recheados de uva mais R$ 1,50. O bombom recheado de uva é 20% mais caro que o bombom recheado de morango. Em um domingo, a confeitaria vendeu 75 unidades de bombons e recebeu, só com esta venda, R$ 205,00. A diferença entre a quantidade vendida de bombons recheados de morango e a quantidade vendida de recheados de uva, nessa ordem, é igual a

(A) 7
(B) 5
(C) 3
(D) 2

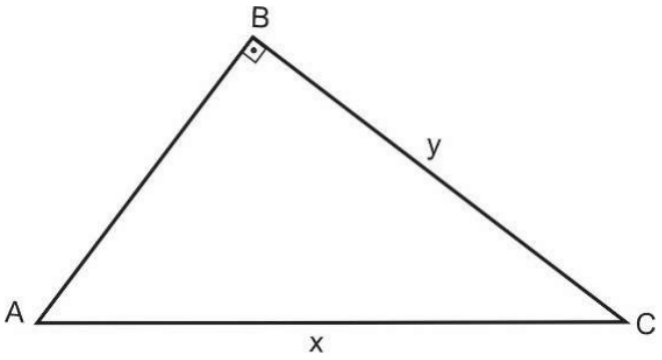
10 [EsPCEx 2025]

Adicionando-se três números inteiros x, y, z, dois a dois, em que $x < y < z$, obtemos os valores 1380, 1588 e 1666. O valor de $x - y + z$ é igual a:

(A) 433
(B) 634
(C) 859
(D) 911
(E) 1015

11 [EPCAR 2023]

Considere o triângulo ABC, mostrado na figura abaixo, em que o lado $\overline{AC}$ mede x cm e $\overline{BC}$ mede y cm.



As medidas dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ satisfazem o sistema de equações

$$\begin{cases} 3x = 4\sqrt{3} + 2y \\ 2x - \sqrt{3} = 3y \end{cases}$$

A área do triângulo ABC, em cm², é igual a

(A) 6
(B) 3
(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(D) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

12 [EsPCEx 2021]

Dado o sistema linear $\begin{cases} x + y + z = a \\ x + 2y + z = 2a \\ 2x + 3y + 2z = a^2 \end{cases}$ os valores do número real a, tais que o sistema linear acima tenha solução, pertencem ao conjunto

(A) $(-\infty, -1]$.
(B) $(-1, 4]$.
(C) $(4, 8]$.
(D) $(8, 11]$.
(E) $(11, +\infty)$.

13 [EsPCEx 2023]

Dado o sistema:

$$\begin{cases} 10x + 50y + 30z = 300 \\ 20x + 140y + 80z = 500 \end{cases}$$

Sendo $x, y, z \in \mathbb{R}$, então o valor de x + y + z é igual a:

(A) 20
(B) 30
(C) 40
(D) 50
(E) 60

5. GABARITO COMENTADO

Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.
07	B	08	B	09	B	10	C
11	D	12	B	13	C		

▼ 01 a 06 – Fixação

01. a) Somando: $2x = 14 \Rightarrow x = 7$, $y = 3$ ⇒ $(7, 3)$. b) Somando: $3x = 9 \Rightarrow x = 3$, $y = 1$ ⇒ $(3, 1)$. c) $x = 6 - 4y$ ⇒ $18 - 12y - 2y = 4 \Rightarrow y = 1$, $x = 2$ ⇒ $(2, 1)$. d) Multiplicando a 1ª por 6: $3x + 2y = 24$; com $x = y + 3$: $3y + 9 + 2y = 24 \Rightarrow y = 3$, $x = 6$ ⇒ $(6, 3)$.

02. a) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ ⇒ SPI. b) $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{3}{5}$ ⇒ SI. c) $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$ ⇒ SPD, solução $(2, 1)$.

03. $g + c = 30$ e $2g + 4c = 80$ ⇒ $g + 2c = 40$; subtraindo: $c = 10$, $g = 20$. São 20 galinhas e 10 coelhos.

04. $c + d = 25$ e $5c + 10d = 190$ ⇒ $c + 2d = 38$; subtraindo: $d = 13$, $c = 12$. São 12 notas de R$ 5 e 13 de R$ 10.

05. $3c + 2p = 34$ e $2c + 5p = 30$. Multiplicando por 2 e por -3: $6c + 4p = 68$ e $-6c - 15p = -90$ ⇒ $-11p = -22 \Rightarrow p = 2$, $c = 10$. Caderno R$ 10,00; caneta R$ 2,00.

06. Para que o sistema seja impossível: $\frac{2}{4} = \frac{k}{6} \neq \frac{5}{1}$ ⇒ $k = 3$ (a condição $\frac{1}{2} \neq 5$ é satisfeita).

▼ 07 a 13 – Concursos militares

07 (B) · EsPCEx 2024.

Somando as três igualdades: $2(T + S + C) = 5600$, logo $T + S + C = 2800$.

$$C = 2800 - (T + S) = 2800 - 1900 = 900$$

08 (B) · EFOMM 2023.

$$9{,}5\,m + 8{,}0\,(40 - m) = 8{,}6 \cdot 40 = 344 \;\Rightarrow\; 1{,}5\,m = 24 \;\Rightarrow\; m = 16$$

09 (B) · EPCAR 2024.

Com m o preço do de morango, o de uva é $1{,}2m$, e $3m = 2{,}4m + 1{,}5$: $m = 2{,}50$ e uva a 3,00 reais.

Com M de morango e $75 - M$ de uva: $2{,}5M + 3(75 - M) = 205$, $225 - 0{,}5M = 205$, $M = 40$. Uva: 35. Diferença: 5.

10 (C) · EsPCEx 2025.

Com $x < y < z$: $x + y = 1380$, $x + z = 1588$ e $y + z = 1666$. Somando: $x + y + z = 2317$.

$z = 937$, $y = 729$, $x = 651$, e $x - y + z = 859$.

11 (D) · EPCAR 2023.

Reescrevendo: $3x - 2y = 4\sqrt{3}$ e $2x - 3y = \sqrt{3}$. Multiplicando a primeira por 3 e a segunda por 2 e subtraindo: $5x = 10\sqrt{3}$, $x = 2\sqrt{3}$. Daí $2y = 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$ e $y = \sqrt{3}$.

O ângulo reto está em B, então AC é a hipotenusa: $AB = \sqrt{12 - 3} = 3$.

$$\text{Área} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

12 (B) · EsPCEx 2021.

Somando as duas primeiras equações: $2x + 3y + 2z = 3a$. Comparando com a terceira:

$$a^2 = 3a \;\Rightarrow\; a = 0 \text{ ou } a = 3$$

Para outros valores o sistema é impossível. Os dois valores estão em $(-1, 4]$.

13 (C) · EsPCEx 2023.

Simplificando: $x + 5y + 3z = 30$ e $x + 7y + 4z = 25$. Procuramos α e β com $\alpha(x + 5y + 3z) + \beta(x + 7y + 4z) = x + y + z$:

$$\alpha + \beta = 1, \quad 5\alpha + 7\beta = 1, \quad 3\alpha + 4\beta = 1 \;\Rightarrow\; \alpha = 3,\ \beta = -2$$

$$x + y + z = 3 \cdot 30 - 2 \cdot 25 = 40$$