PROF. LUIS TEIXEIRA
Física | Matemática

FICHA DE FÍSICA

Gravitação

Leis de Kepler e Gravitação Universal

Aluno(a): _____	Data: ___/___/____	Prof.: Luis Teixeira

1. TEORIA

1.1 Do céu de Ptolomeu ao Sol de Kepler

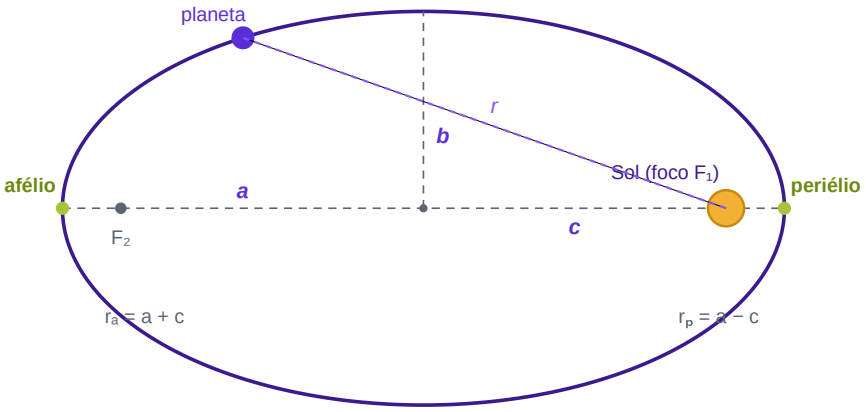
Por quase 1500 anos dominou o **modelo geocêntrico** de **Ptolomeu** (séc. II): a Terra parada no centro e os astros girando em círculos, com *epiciclos* (círculos sobre círculos) para explicar o movimento retrógrado dos planetas, que em certas épocas parecem andar para trás no céu.

- **Copérnico** (1543) propôs o **modelo heliocêntrico**: o Sol no centro e a Terra como mais um planeta. Ainda usava círculos perfeitos.
- **Tycho Brahe** (fim do séc. XVI) fez, a olho nu, as medições mais precisas da época das posições dos planetas, sobretudo de Marte.
- **Kepler** (1609–1619), usando os dados de Tycho, concluiu que nenhum modelo circular se ajustava às medidas de Marte. Desse trabalho resultaram as **três leis de Kepler**, que *descrevem* como os planetas se movem.
- **Galileu** (1610), com a luneta, observou quatro luas girando em torno de Júpiter e as fases de Vênus, fatos que o modelo geocêntrico não explicava.
- **Newton** (1687) explicou *por que* eles se movem assim: a **Lei da Gravitação Universal**. As leis de Kepler passam a ser consequências dela.

> **OBSERVAÇÃO**
> As leis de Kepler descrevem a forma das órbitas e os tempos de percurso; a lei de Newton explica a causa desse movimento, uma força que depende das massas e da distância. A maior parte dos problemas se resolve com duas equações: a lei da gravitação e a condição de que a força gravitacional é a resultante centrípeta. As três leis valem para qualquer sistema em que um corpo de massa muito maior domina o movimento dos demais: planetas em torno do Sol, a Lua e os satélites artificiais em torno da Terra, as luas de Júpiter em torno de Júpiter.

1.2 Primeira lei de Kepler: lei das órbitas

> **1ª LEI**
> Cada planeta descreve uma órbita **elíptica** em torno do Sol, e o Sol ocupa um dos **focos** da elipse.



Elipse de semieixo maior a, semieixo menor b e semidistância focal c, com $a^2 = b^2 + c^2$.

- **Periélio**: ponto da órbita mais próximo do Sol, a distância $r_p = a - c$.
- **Afélio**: ponto mais afastado, a distância $r_a = a + c$.
- Somando: $r_p + r_a = 2a$. Logo, o semieixo maior é a média entre as distâncias mínima e máxima:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2}.$$

  Por isso a é chamado de **raio médio** da órbita.
- **Excentricidade** $e = \dfrac{c}{a}$ $(0 \le e < 1)$ mede o achatamento da elipse. Para $e = 0$, a elipse se reduz a uma circunferência (os focos coincidem com o centro). Também vale $e = \dfrac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$.
- Para órbitas em torno da Terra, os pontos de menor e maior distância chamam-se **perigeu** e **apogeu**.

Exemplo. A Terra fica a $1{,}47 \times 10^{11}$ m do Sol no periélio (início de janeiro) e a $1{,}52 \times 10^{11}$ m no afélio (início de julho). Então $a = \dfrac{1{,}47 + 1{,}52}{2} \times 10^{11} \approx 1{,}50 \times 10^{11}$ m e $e = \dfrac{1{,}52 - 1{,}47}{1{,}52 + 1{,}47} \approx 0{,}017$. A distância varia apenas cerca de 3% ao longo do ano.

ERRO COMUM

As órbitas dos planetas são elipses **quase circulares** (a da Terra tem $e \approx 0{,}017$). Os desenhos dos livros exageram o achatamento. Por isso, em muitos problemas, tratamos a órbita como circular de raio $r = a$. Já os cometas têm órbitas muito alongadas (e próximo de 1). Além disso, o Sol fica no **foco**, e não no centro da elipse. Outro erro frequente é atribuir as estações do ano à variação da distância ao Sol: a Terra passa pelo periélio em janeiro, quando é inverno no hemisfério norte. As estações se devem à inclinação do eixo de rotação.

1.3 Segunda lei de Kepler: lei das áreas

2ª LEI

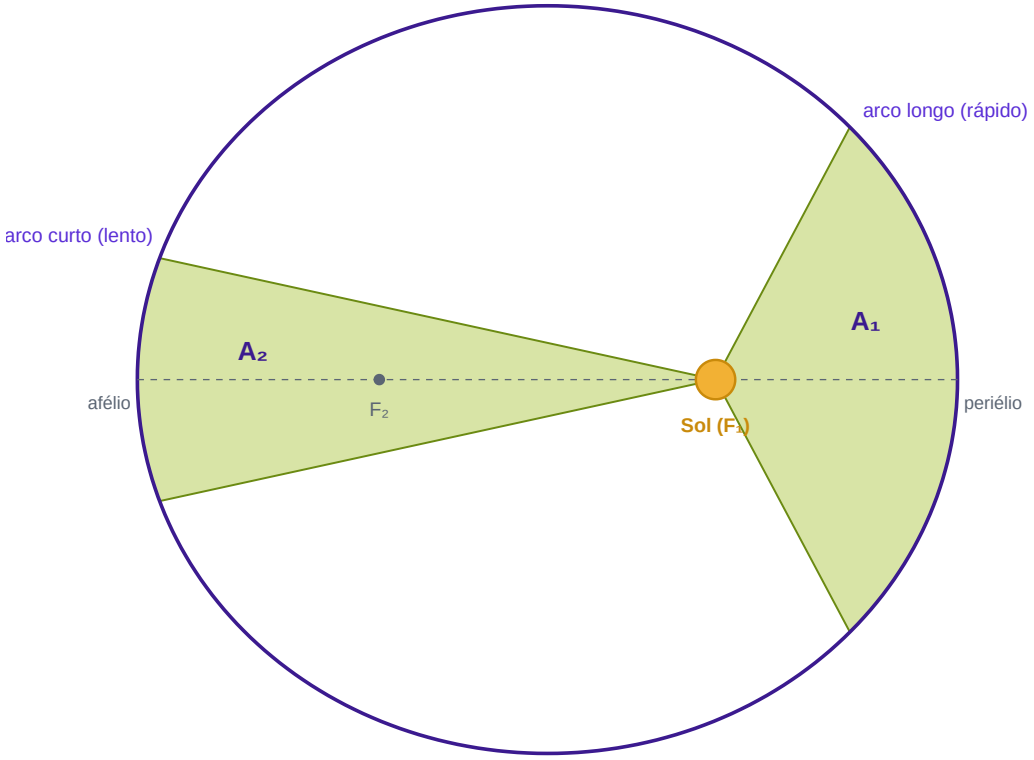
O segmento que liga o Sol ao planeta (*raio vetor*) varre **áreas iguais em intervalos de tempo iguais**. A grandeza $\dfrac{\Delta A}{\Delta t}$ (velocidade areolar) é constante.

FÓRMULA

Para dois trechos quaisquer da órbita, com áreas varridas A_1 e A_2 nos intervalos Δt_1 e Δt_2:

$$\frac{A_1}{\Delta t_1} = \frac{A_2}{\Delta t_2}.$$

Em particular, se $\Delta t_1 = \Delta t_2$, então $A_1 = A_2$; e se $A_2 = 2A_1$, então $\Delta t_2 = 2\,\Delta t_1$: a área varrida é proporcional ao tempo gasto.



A₁ = A₂ em tempos iguais ⇒ o planeta é mais rápido perto do Sol

As duas áreas sombreadas são iguais e foram varridas no mesmo tempo.

Consequência: perto do Sol o raio vetor é curto; para varrer a mesma área no mesmo tempo, o planeta percorre um arco mais longo. Portanto, ele é **mais rápido no periélio** e mais lento no afélio. O movimento é acelerado do afélio ao periélio e retardado do periélio ao afélio.

Relação entre as velocidades. No periélio e no afélio a velocidade é perpendicular ao raio. Num intervalo pequeno Δt, a área varrida é praticamente um triângulo de base $v\,\Delta t$ e altura r:

$$\frac{1}{2}\,r_p\,v_p\,\Delta t = \frac{1}{2}\,r_a\,v_a\,\Delta t \;\Rightarrow\; \boxed{v_p\,r_p = v_a\,r_a}$$

As velocidades nos extremos do eixo maior são inversamente proporcionais às distâncias ao Sol. Para a Terra, $\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{1{,}52}{1{,}47} \approx 1{,}03$: no periélio ela é cerca de 3% mais rápida que no afélio. Para um cometa com $r_a = 50\,r_p$, a velocidade no periélio é 50 vezes a do afélio.

Como a área é proporcional ao tempo, a fração do período gasta num trecho é igual à fração da área total da elipse (πab) varrida nesse trecho. Assim, o planeta gasta mais da metade do período na metade da órbita que contém o afélio.

OBSERVAÇÃO

A força gravitacional aponta sempre para o Sol (força **central**) e, por isso, não exerce torque em relação a ele. Assim, o **momento angular** $L = m\,v\,r\,\operatorname{sen}\theta$ se conserva. A lei das áreas é uma consequência dessa conservação e vale para qualquer força central, não apenas para a gravitacional. A velocidade areolar vale $\dfrac{\Delta A}{\Delta t} = \dfrac{L}{2m}$.

1.4 Terceira lei de Kepler: lei dos períodos

3ª LEI

Para todos os corpos que orbitam o **mesmo** astro central, o quadrado do período é proporcional ao cubo do semieixo maior:

$$\frac{T^2}{a^3} = K \quad (\text{mesma constante para todos}) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}.$$

Dedução para órbita circular (raio r, astro central de massa M). A força gravitacional é a resultante centrípeta:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\,\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$$

- A constante $K = \dfrac{4\pi^2}{GM}$ depende **só da massa do astro central**, não da massa do planeta/satélite. A Lua e um satélite artificial têm a mesma K (orbitam a Terra); a Terra e Marte têm outra (orbitam o Sol).
- Unidades práticas: no Sistema Solar, com T em **anos** e a em **unidades astronômicas** (1 UA = distância média Terra–Sol $\approx 1{,}5 \times 10^{11}$ m), a lei assume a forma $T^2 = a^3$.
- Planetas mais afastados têm período maior e velocidade orbital menor.
- **Massa do astro central.** Isolando M: $M = \dfrac{4\pi^2 r^3}{G\,T^2}$. Medindo o raio e o período da órbita de um satélite, obtém-se a massa do corpo que ele orbita. Com a Lua ($r = 3{,}84 \times 10^8$ m, $T = 27{,}3$ dias $\approx 2{,}36 \times 10^6$ s), resulta $M_T \approx 6{,}0 \times 10^{24}$ kg. É assim que se determinam as massas do Sol e de Júpiter.

ERRO COMUM

Usar a 3ª lei comparando corpos que orbitam astros **diferentes** (ex.: a Lua em torno da Terra com Marte em torno do Sol). Outro erro: usar a distância até a **superfície** (altitude h) no lugar da distância até o **centro** ($r = R + h$).

1.5 Lei da Gravitação Universal (Newton)

LEI DE NEWTON DA GRAVITAÇÃO

Dois corpos de massas M e m, cujos centros estão separados por d, se atraem com forças de mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos (ação e reação):

$$F = \frac{G\,M\,m}{d^2}, \qquad G \approx 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}.$$

- F é **diretamente proporcional** ao produto das massas e **inversamente proporcional ao quadrado da distância**: dobrando d, F cai para $\frac{1}{4}$; triplicando d, cai para $\frac{1}{9}$.

- Para esferas homogêneas (ou em camadas), a atração externa é a mesma que se toda a massa estivesse no **centro**. Por isso d é medido entre os centros.
- **Superposição:** se vários corpos atraem um mesmo corpo, a força total é a **soma vetorial** das forças individuais.
- A força gravitacional é sempre **atrativa** e não pode ser blindada: nenhum material colocado entre os corpos a anula.
- Como G é muito pequena, a atração entre objetos do dia a dia é imperceptível. Duas pessoas de 60 kg a 1 m uma da outra se atraem com $F = \dfrac{6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 60 \cdot 60}{1^2} \approx 2{,}4 \times 10^{-7}$ N, menos que o peso de um grão de poeira. A constante foi medida por **Cavendish** (1798) com uma **balança de torção**: esferas grandes de chumbo atraíam esferas pequenas presas a uma haste suspensa por um fio, e a pequena torção do fio permitia calcular G.
- **Massa da Terra.** O peso de um corpo na superfície é a atração da Terra: $mg_0 = \dfrac{GM_T m}{R^2}$, logo $M_T = \dfrac{g_0 R^2}{G} = \dfrac{10 \cdot (6{,}4 \times 10^6)^2}{6{,}67 \times 10^{-11}} \approx 6 \times 10^{24}$ kg. Por isso o experimento de Cavendish ficou conhecido como a pesagem da Terra.

> **ERRO COMUM**
>
> Achar que a Terra atrai a Lua com força maior do que a Lua atrai a Terra. As forças são iguais (3ª lei de Newton); o que muda é o efeito: a **aceleração** $a = F/m$ é muito maior no corpo de menor massa.

1.6 Campo gravitacional

Dividindo a força pela massa de prova m, obtemos o campo gravitacional criado por M a uma distância r do seu centro:

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM}{r^2} \qquad (\text{unidade: } \mathrm{N/kg} = \mathrm{m/s^2}).$$

O campo é um vetor dirigido para o centro do astro. Seu valor não depende da massa do corpo de prova: no mesmo ponto, todos os corpos caem com a mesma aceleração g.

- **Na superfície** ($r = R$): $g_0 = \dfrac{GM}{R^2}$. Daí resulta a substituição $\boxed{GM = g_0 R^2}$, muito usada, pois vários problemas fornecem g_0 e R em vez de G e M.
- **A uma altitude** h: dividindo $g = \dfrac{GM}{(R+h)^2}$ por $g_0 = \dfrac{GM}{R^2}$, a constante GM se cancela:

  $$\frac{g}{g_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2} \;\Rightarrow\; g = g_0 \left(\frac{R}{R+h}\right)^2.$$

  Para $h = R$ (distância $2R$ do centro), $g = g_0/4$.
- **Pequenas altitudes** ($h \ll R$): vale a aproximação $g \approx g_0 \left(1 - \dfrac{2h}{R}\right)$, pois $(1+x)^{-2} \approx 1 - 2x$ para x pequeno. Subindo 10 km, g diminui só $0{,}3\%$; na altitude da Estação Espacial ($h = 400$ km), o valor exato é $0{,}886\, g_0$ e a aproximação dá $0{,}875\, g_0$.
- **Em função da densidade**: com $M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$, $g_0 = \frac{4}{3}\pi G \rho R$. Planetas de mesma densidade têm g proporcional ao raio. A densidade média da Terra é $\rho \approx 5{,}5 \times 10^3$ kg/m³, cerca de duas vezes a das rochas da superfície: o núcleo é muito mais denso.
- **No interior** de um planeta homogêneo, a uma distância $r < R$ do centro, só a massa da esfera interna de raio r atrai (a casca externa dá resultante nula). Essa massa é $M\frac{r^3}{R^3}$, então

$$g = \frac{G\,M r^3/R^3}{r^2} = g_0\,\frac{r}{R} \quad (\text{cresce linearmente com } r).$$

No centro, $g = 0$.

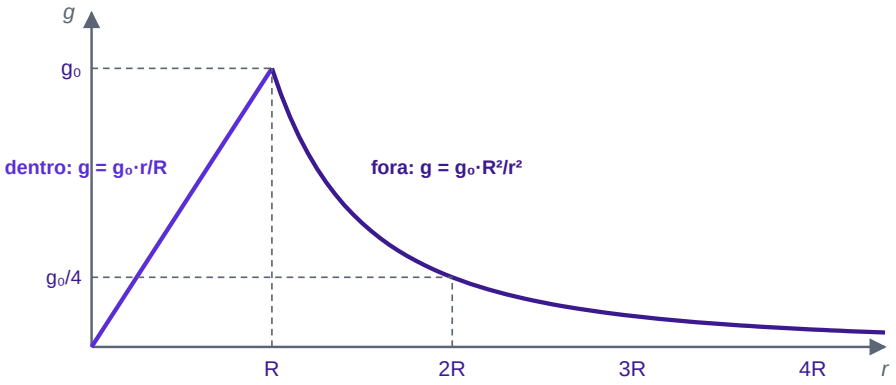


Gráfico de g em função da distância ao centro: reta dentro do planeta, $1/r^2$ fora. O máximo é na superfície.

Rotação e latitude. Um corpo em repouso no solo gira com a Terra num círculo de raio $R\cos\varphi$, em que φ é a latitude. Parte da atração gravitacional atua como resultante centrípeta, e a balança registra o **peso aparente**, um pouco menor que o peso. No equador ($\varphi = 0$), onde o raio de giro é máximo:

$$m g_{\text{ap}} = m g_0 - m\,\omega^2 R, \qquad \omega = \frac{2\pi}{86\,164\ \text{s}} \approx 7{,}3 \times 10^{-5}\ \text{rad/s}, \qquad \omega^2 R \approx 0{,}034\ \text{m/s}^2.$$

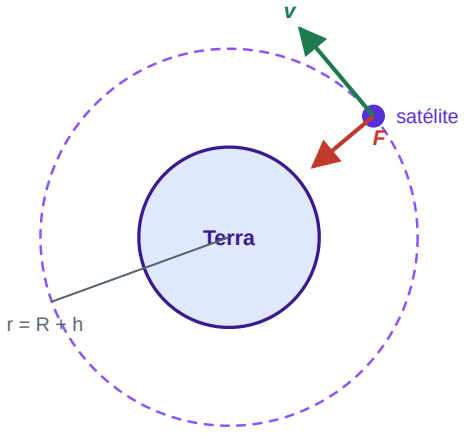
Nos polos ($\varphi = 90^\circ$) o raio de giro é nulo e o efeito desaparece. A Terra também é achatada nos polos, o que reforça a diferença: $g \approx 9{,}78$ m/s² no equador e $9{,}83$ m/s² nos polos. Se a Terra girasse com período de cerca de 84 min, teríamos $\omega^2 R = g_0$ e os corpos no equador ficariam com peso aparente nulo; esse é o período de um satélite em órbita rasante (seção 1.7).

1.7 Satélites em órbita circular

Nesta seção e nas seguintes, salvo indicação, usamos para a Terra $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}$ kg e $R = 6{,}4 \times 10^{6}$ m, o que dá $GM_T = 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 6{,}0 \times 10^{24} \approx 4{,}0 \times 10^{14}$ m³/s². Com $g_0 = 10$ m/s², o produto $g_0 R^2$ vale $4{,}1 \times 10^{14}$ m³/s²; a pequena diferença vem do arredondamento de g_0 (o valor medido é $9{,}8$ m/s²).

1.7.1 Velocidade orbital

Um satélite de massa m descreve uma circunferência de raio $r = R + h$ em torno de um astro de massa M, sem motores ligados e fora da atmosfera. A única força sobre ele é a atração gravitacional, dirigida para o centro. Como o movimento é circular e uniforme, essa força é a resultante centrípeta.



F gravitacional = resultante centrípeta

A gravidade é a única força e faz o papel de resultante centrípeta.

1. **Força gravitacional:** $F = \dfrac{GMm}{r^2}$, com r medido a partir do **centro** do astro.
2. **Resultante centrípeta** necessária para a trajetória circular: $F_{cp} = \dfrac{mv^2}{r}$.
3. **Igualando:** $\dfrac{GMm}{r^2} = \dfrac{mv^2}{r}$.
4. **Simplificando** m e um fator r: $v^2 = \dfrac{GM}{r}$.

VELOCIDADE ORBITAL

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 R^2}{r}} = R\sqrt{\frac{g_0}{r}}, \qquad r = R + h.$$

As duas últimas formas usam $GM = g_0 R^2$ e servem quando o problema fornece g_0 e R.

- **Depende** apenas da massa M do astro central e do raio r da órbita.
- **Não depende** da massa m do satélite (ela se cancela no passo 4), nem de sua forma. Uma ferramenta solta por um astronauta segue a mesma órbita da nave; um satélite de 100 kg e outro de 10 toneladas na mesma altitude têm a mesma velocidade.
- $v \propto \dfrac{1}{\sqrt{r}}$: quadruplicando o raio da órbita, a velocidade cai à metade.
- O módulo da velocidade é constante, mas a direção muda a cada instante. O satélite tem aceleração centrípeta $a_{cp} = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{GM}{r^2}$, igual ao campo gravitacional g no ponto da órbita.

ERROS COMUNS

(1) Usar a altitude h no lugar do raio $r = R + h$. (2) Achar que um satélite de maior massa precisa de mais velocidade para se manter na mesma órbita. (3) Acrescentar uma força centrífuga que equilibraria o peso: num referencial inercial, a única força é a gravitacional, e a resultante centrípeta é essa mesma força, não uma força a mais. O satélite **não** está em equilíbrio; ele é acelerado para o centro o tempo todo. (4) Achar que o satélite precisa de motores ligados para continuar girando: a órbita se mantém por inércia, e os motores só são usados para corrigir o efeito do ar rarefeito ou para mudar de órbita.

1.7.2 Período, velocidade angular e 3ª lei de Kepler

Em uma volta, o satélite percorre $2\pi r$ com velocidade constante v:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}.$$

Elevando a expressão de T ao quadrado, obtém-se $\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM}$, que é a 3ª lei de Kepler (seção 1.4). Como $T \propto r^{3/2}$, o período cresce mais depressa que o raio: o satélite mais alto percorre um caminho maior e, além disso, com velocidade menor.

Órbita	Altitude h	Raio r (m)	v (km/s)	Período T	g local (m/s²)
Rasante (teórica)	≈ 0	$6{,}4 \times 10^6$	$7{,}9$	≈ 85 min	$9{,}8$
Estação Espacial (ISS)	400 km	$6{,}8 \times 10^6$	$7{,}7$	≈ 93 min	$8{,}7$
Satélites GPS	$20\,200$ km	$2{,}66 \times 10^7$	$3{,}9$	≈ 12 h	$0{,}57$
Geoestacionário	$35\,800$ km	$4{,}22 \times 10^7$	$3{,}1$	$\approx 23{,}9$ h	$0{,}22$
Lua	$\approx 3{,}8 \times 10^5$ km	$3{,}84 \times 10^8$	$1{,}0$	≈ 27 dias	$0{,}0027$

Valores calculados com $GM_T = 4{,}0 \times 10^{14}$ m³/s². A última coluna é $g = GM/r^2$, que também é a aceleração centrípeta do satélite.

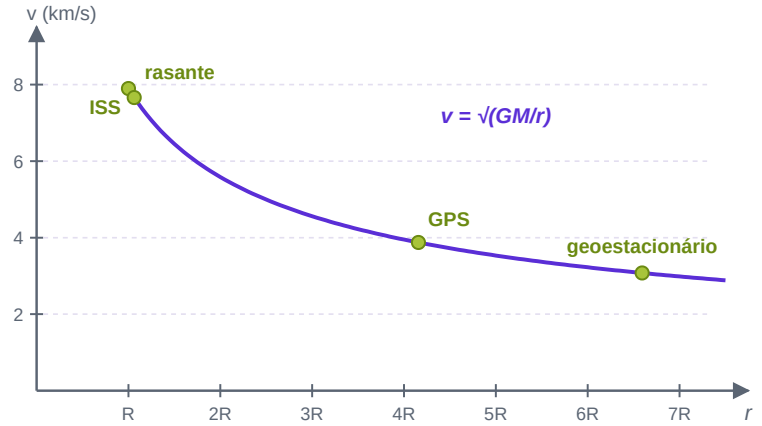
Exemplo. Calcule a velocidade e o período da Estação Espacial Internacional, que orbita a $h = 400$ km.

Resolução:

1. **Raio da órbita:** $r = R + h = 6{,}4 \times 10^6 + 0{,}4 \times 10^6 = 6{,}8 \times 10^6$ m.
2. **Velocidade:** $v = \sqrt{\dfrac{4{,}0 \times 10^{14}}{6{,}8 \times 10^6}} = \sqrt{5{,}9 \times 10^7} \approx 7{,}7 \times 10^3$ m/s.
3. **Período:** $T = \dfrac{2\pi r}{v} = \dfrac{2\pi \cdot 6{,}8 \times 10^6}{7{,}67 \times 10^3} \approx 5{,}6 \times 10^3$ s ≈ 93 min.
4. **Voltas por dia:** $\dfrac{86\,400}{5{,}6 \times 10^3} \approx 15{,}5$.

Resposta: $v \approx 7{,}7$ km/s (cerca de $28\,000$ km/h) e $T \approx 93$ min

Satélites mais baixos são mais rápidos. Para manter a trajetória circular, o satélite precisa de $v^2 = g\,r$, em que $g = GM/r^2$ é o campo no local da órbita. Ao subir, r aumenta, mas g diminui com $1/r^2$, mais depressa; o produto $g\,r = GM/r$ diminui, e a velocidade necessária também. Perto do planeta, a atração é intensa e a trajetória precisa ser percorrida depressa para que o satélite não caia; longe, a atração fraca é suficiente para curvar uma trajetória percorrida devagar.



Velocidade orbital em função do raio da órbita (Terra). A curva cai com $1/\sqrt{r}$: em $r = 4R$, a velocidade é metade da rasante.

1.7.3 Órbita rasante e primeira velocidade cósmica

Uma órbita rasante teria raio igual ao do planeta ($r \approx R$), desprezando a atmosfera e o relevo. Nesse caso:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{g_0 R} \qquad \text{e} \qquad T_1 = \frac{2\pi R}{v_1} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}.$$

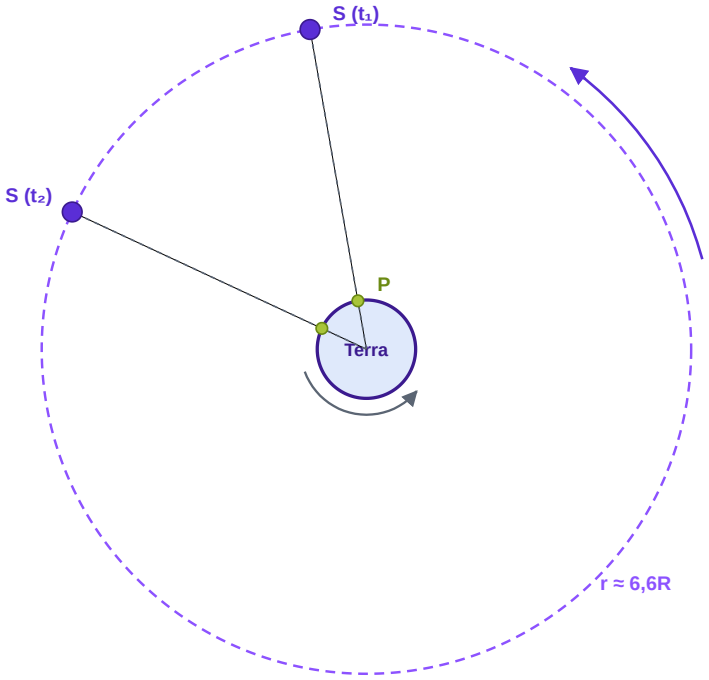
Para a Terra, com $g_0 = 9{,}8$ m/s², $v_1 \approx 7{,}9$ km/s e $T_1 \approx 85$ min; com $g_0 = 10$ m/s², os valores arredondados são $8{,}0$ km/s e 84 min. Essa é a **primeira velocidade cósmica**: a velocidade horizontal que um corpo precisa ter junto à superfície para entrar em órbita circular. É também a maior velocidade possível de um satélite em órbita circular, pois qualquer órbita mais alta é mais lenta.

A rotação da Terra ajuda no lançamento. Um ponto do equador já se move para leste com $\omega R \approx 7{,}3 \times 10^{-5} \cdot 6{,}4 \times 10^{6} \approx 470$ m/s. Por isso os foguetes são lançados para leste, e as bases de lançamento ficam, de preferência, perto do equador, como a de Alcântara (MA), a cerca de 2° de latitude sul.

1.7.4 Satélite geoestacionário

Um satélite **geoestacionário** permanece sempre sobre o mesmo ponto do equador, parado em relação ao solo. Para isso, ele precisa:

1. girar no **plano do equador**, pois a órbita tem de conter o centro da Terra e acompanhar um ponto do equador;
2. girar no **mesmo sentido** da rotação da Terra (de oeste para leste);
3. ter **período igual ao da rotação da Terra**: 1 dia sideral, $T = 23$ h 56 min $\approx 86\,164$ s. O dia solar de 24 h é um pouco maior porque, enquanto gira, a Terra também avança na órbita em torno do Sol. Muitos problemas usam $T = 24$ h; o resultado muda menos de $0{,}2\%$.



Vista do polo norte: o satélite S e o ponto P do equador giram juntos

O raio que liga o centro da Terra ao satélite passa sempre pelo mesmo ponto P do equador: os dois têm a mesma velocidade angular.

Exemplo. Calcule o raio da órbita, a altitude e a velocidade de um satélite geoestacionário.

Resolução:

1. **3ª lei de Kepler:** $r^3 = \dfrac{GM\,T^2}{4\pi^2} = \dfrac{4{,}0 \times 10^{14} \cdot (8{,}62 \times 10^{4})^2}{4\pi^2} \approx 7{,}5 \times 10^{22}$ m³.
2. **Raiz cúbica:** $r \approx 4{,}22 \times 10^{7}$ m, cerca de $6{,}6\,R$.
3. **Altitude:** $h = r - R \approx 4{,}22 \times 10^{7} - 0{,}64 \times 10^{7} \approx 3{,}58 \times 10^{7}$ m $\approx 35\,800$ km.

4 **Velocidade:** $v = \dfrac{2\pi r}{T} = \dfrac{2\pi \cdot 4{,}22 \times 10^7}{8{,}62 \times 10^4} \approx 3{,}1 \times 10^3$ m/s.

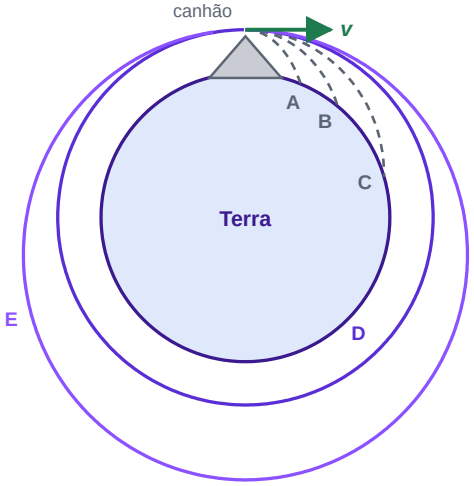
Resposta: $r \approx 4{,}2 \times 10^7$ m, $h \approx 3{,}6 \times 10^7$ m e $v \approx 3{,}1$ km/s

O mesmo resultado sai da comparação com a Lua, que orbita a Terra em $27{,}3$ dias: $\dfrac{r_L}{r_G} = \left(\dfrac{T_L}{T_G}\right)^{2/3} = 27{,}3^{2/3} \approx 9{,}1$, e $r_L \approx 9{,}1 \cdot 4{,}22 \times 10^7 \approx 3{,}8 \times 10^8$ m, que é de fato a distância Terra–Lua.

> **OBSERVAÇÃO**
> Só existe uma altitude geoestacionária, pois o período fixa o raio. Esses satélites são usados em telecomunicações e meteorologia: a antena no solo fica apontada sempre para o mesmo ponto do céu. Um satélite com período de um dia sideral, mas em órbita inclinada em relação ao equador, é apenas **geossíncrono**: visto do solo, oscila para o norte e para o sul ao longo do dia.

1.7.5 Imponderabilidade: queda livre contínua

Newton imaginou um canhão no alto de uma montanha muito alta, disparando projéteis na horizontal. Com pouca velocidade, o projétil cai perto da montanha (A). Aumentando a velocidade, ele cai cada vez mais longe (B, C), porque a superfície da Terra se curva sob a trajetória. Com a velocidade orbital, a queda acompanha exatamente a curvatura da Terra e o projétil dá a volta completa sem tocar o solo (D). Com velocidade um pouco maior, a órbita fica elíptica (E).



A, B, C: caem no solo; D: órbita circular; E: órbita elíptica

Canhão de Newton: trajetórias de projéteis lançados horizontalmente com velocidades cada vez maiores (montanha exagerada).

Os números confirmam a ideia. Em 1 s, um corpo lançado na horizontal cai cerca de $\frac{1}{2} g_0 t^2 = 5$ m. Ao longo de 8 km de distância horizontal, a superfície da Terra se afasta da reta tangente cerca de $\dfrac{d^2}{2R} = \dfrac{(8 \times 10^3)^2}{2 \cdot 6{,}4 \times 10^6} = 5$ m. Um corpo a 8 km/s percorre 8 km em 1 s, cai 5 m e continua à mesma altura em relação ao solo, que também baixou 5 m: está em órbita.

IMPONDERABILIDADE

Na Estação Espacial ($h \approx 400$ km), a gravidade ainda vale cerca de 89% de g_0. Os astronautas flutuam porque eles e a estação estão juntos em **queda livre**: caem continuamente em direção à Terra, mas, como têm grande velocidade tangencial, nunca atingem o solo. Como todos os corpos a bordo têm a mesma aceleração g, nada empurra o astronauta contra o piso, e uma balança sob seus pés marcaria zero. O peso aparente é nulo, embora o peso continue atuando: é ele que mantém a estação em órbita. A mesma sensação ocorre num elevador em queda livre ou nos voos parabólicos usados no treinamento de astronautas.

ERROS COMUNS

(1) Dizer que no espaço não há gravidade: a 400 km de altitude o campo vale cerca de $8{,}7$ m/s². A expressão gravidade zero descreve o peso aparente, não o campo. (2) Achar que o satélite flutua porque está longe demais para ser atraído: sem atração, ele seguiria em linha reta e se afastaria da Terra. (3) Achar que o astronauta está em equilíbrio por estar em repouso em relação à nave: a nave e o astronauta têm a mesma aceleração, dirigida para o centro da Terra.

1.8 Energia no campo gravitacional

1.8.1 Limite da expressão mgh

A expressão $E_p = mgh$ foi obtida supondo o peso **constante**: o trabalho do peso numa subida h é $-mgh$, força constante vezes deslocamento. Isso só é razoável perto da superfície, onde g quase não varia. Para alturas comparáveis ao raio do planeta, a força diminui à medida que o corpo sobe (em $h = R$ ela já é um quarto do peso na superfície), e o produto força × deslocamento deixa de dar o trabalho. Precisamos de uma expressão que leve em conta a variação de F com a distância.

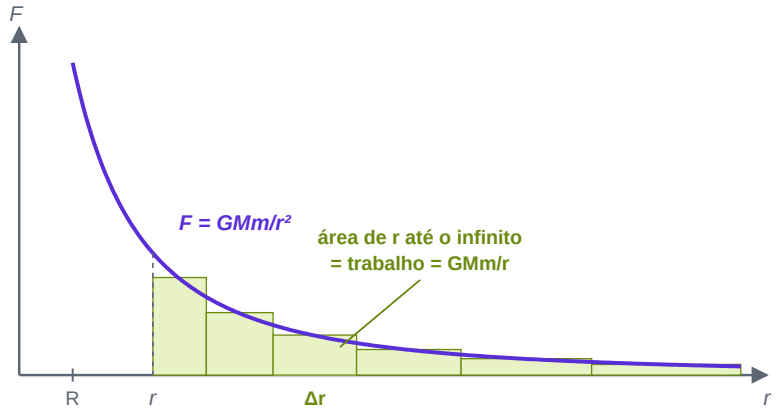
1.8.2 Energia potencial gravitacional

ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL

Para um corpo de massa m a uma distância $r \geq R$ do centro de um astro de massa M, adotando $E_p = 0$ quando os corpos estão infinitamente afastados:

$$E_p = -\frac{GMm}{r}.$$

Justificativa pelo trabalho. Considere o trabalho que um agente externo realiza para levar o corpo, lentamente, da distância r até muito longe (o infinito). Ele precisa aplicar uma força igual e oposta à gravitacional, $F = \dfrac{GMm}{x^2}$ em cada posição x. Como a força varia, o trabalho é a **área sob o gráfico** $F \times x$, de r até o infinito.



A área sob a curva $F = GMm/x^2$ é calculada somando faixas estreitas de largura Δr.

Divida o caminho em pequenos trechos, de $r_0 = r$ até r_1, de r_1 até r_2, e assim por diante. Num trecho curto, de r_i a r_{i+1}, a força fica entre $\dfrac{GMm}{r_i^2}$ e $\dfrac{GMm}{r_{i+1}^2}$; um valor intermediário conveniente é $\dfrac{GMm}{r_i\, r_{i+1}}$. O trabalho nesse trecho é, então,

$$\Delta W_i \approx \frac{GMm}{r_i\, r_{i+1}}\,(r_{i+1} - r_i) = GMm\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}}\right).$$

Somando todos os trechos, os termos intermediários se cancelam aos pares:

$$W = GMm\left[\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right) + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{r_{N-1}} - \frac{1}{r_N}\right)\right] = GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_N}\right).$$

Quanto mais estreitas as faixas, melhor a aproximação. Levando o último ponto para o infinito, $1/r_N \to 0$ e o trabalho do agente é $W = \dfrac{GMm}{r}$. Esse trabalho fica armazenado como energia potencial: $E_p(\infty) - E_p(r) = \dfrac{GMm}{r}$. Com $E_p(\infty) = 0$, resulta $E_p(r) = -\dfrac{GMm}{r}$. Pelo mesmo raciocínio, ao passar de r_1 para r_2:

$$\Delta E_p = E_p(r_2) - E_p(r_1) = GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \qquad W_{\text{peso}} = -\Delta E_p.$$

SINAL NEGATIVO

A escolha natural do zero é o infinito, onde a força é nula. A partir daí, quando os corpos se aproximam, a força gravitacional realiza trabalho positivo e a energia potencial **diminui**; como começou em zero, fica negativa. Quanto menor a distância, mais negativo é E_p. O sinal não tem significado físico isolado: só as diferenças de energia potencial são medidas. A energia potencial é do **sistema** formado pelos dois corpos, e não de um deles.

1.8.3 Relação com mgh para pequenas alturas

Levando um corpo da superfície ($r_1 = R$) até a altura h ($r_2 = R + h$):

$$\Delta E_p = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = \frac{GMm\,h}{R(R+h)} = \frac{GM}{R^2}\,m\,h \cdot \frac{R}{R+h} = m\,g_0\,h \cdot \frac{R}{R+h}.$$

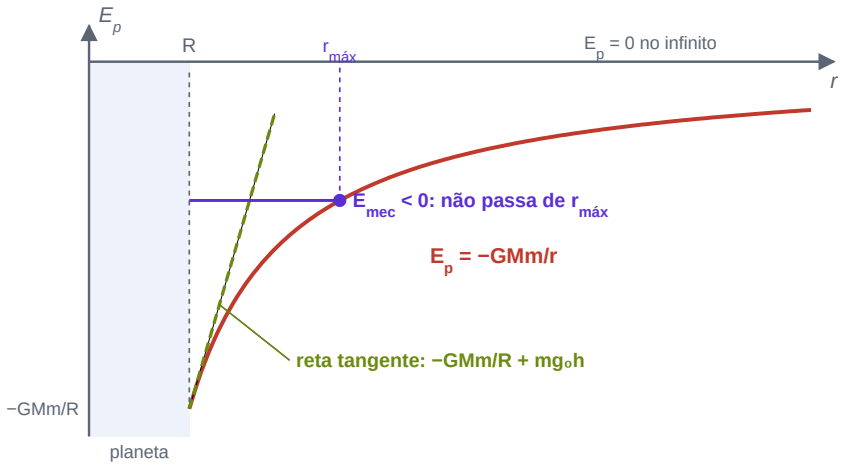
Quando $h \ll R$, o fator $\dfrac{R}{R+h}$ é praticamente 1 e $\Delta E_p \approx mg_0h$. A expressão do ensino fundamental é um caso particular da expressão geral. O erro cometido ao usar mg_0h é de aproximadamente h/R:

h	10 km	100 km	1000 km	6400 km $(= R)$
$\dfrac{mg_0h}{\Delta E_p} = \dfrac{R+h}{R}$	$1{,}0016$	$1{,}016$	$1{,}16$	2

Até alguns quilômetros de altura o erro é desprezível. Para $h = R$, a expressão mg_0h dá o dobro do valor correto.

1.8.4 Gráfico de $E_p \times r$: poço de potencial

O gráfico de $E_p = -GMm/r$ é um ramo de hipérbole que sobe em direção a zero à medida que r cresce. Ele lembra um poço: o corpo está no fundo, junto ao planeta, e precisa receber energia para subir. Perto da superfície, a curva se confunde com a reta tangente de inclinação mg_0, que corresponde a mgh.



Poço de potencial gravitacional fora do planeta. A reta tangente em $r = R$ representa a aproximação mgh. A linha horizontal indica um corpo de energia mecânica negativa.

Uma linha horizontal no nível da energia mecânica E_{mec} permite ler o movimento. Em cada ponto, a energia cinética é a distância vertical entre essa linha e a curva: $E_c = E_{mec} - E_p \geq 0$. Se $E_{mec} < 0$, a linha corta a curva em $r_{\text{máx}}$, onde $E_c = 0$: o corpo não consegue ir além desse ponto e está **ligado** ao planeta. Se $E_{mec} \geq 0$, a linha fica acima da curva em toda parte e o corpo pode se afastar indefinidamente.

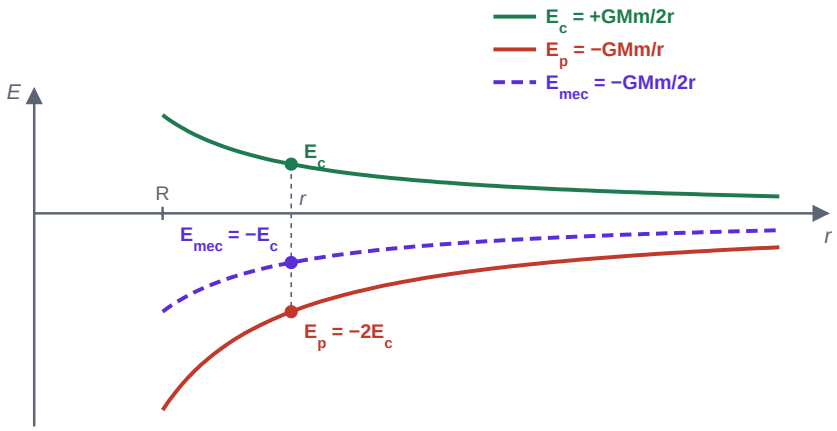
1.8.5 Energias do satélite em órbita circular

Da condição de órbita, $\dfrac{mv^2}{r} = \dfrac{GMm}{r^2}$, vem $mv^2 = \dfrac{GMm}{r}$. Então:

ENERGIAS NA ÓRBITA CIRCULAR DE RAIO R

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{2r}, \qquad E_p = -\frac{GMm}{r}, \qquad E_{mec} = E_c + E_p = -\frac{GMm}{2r}.$$

Relações entre elas: $E_c = -E_{mec}$, $E_p = 2E_{mec}$, $E_p = -2E_c$.



Energias de um satélite em órbita circular em função do raio, com zero no infinito. Em qualquer raio, $E_{mec} = -E_c$ e $E_p = -2E_c$; a energia mecânica é negativa, pois o satélite está ligado ao planeta.

Por exemplo, para um satélite de 1000 kg na altitude da Estação Espacial ($r = 6{,}8 \times 10^6$ m): $E_c = \dfrac{4{,}0 \times 10^{14} \cdot 10^3}{2 \cdot 6{,}8 \times 10^6} \approx 2{,}9 \times 10^{10}$ J, $E_p \approx -5{,}9 \times 10^{10}$ J e $E_{mec} \approx -2{,}9 \times 10^{10}$ J.

1.8.6 Órbita mais alta: mais energia mecânica, menos energia cinética

Ao aumentar o raio, $E_{mec} = -\dfrac{GMm}{2r}$ fica **menos negativa**, isto é, aumenta; já $E_c = \dfrac{GMm}{2r}$ diminui. Uma órbita mais alta tem mais energia mecânica e menor velocidade. Para subir, é preciso fornecer energia, mas o satélite chega mais lento: a energia fornecida e a energia cinética perdida vão para a energia potencial, que aumenta o dobro do que a cinética diminui.

Satélite freado pelo ar. Nas órbitas baixas, o ar rarefeito exerce uma pequena força de atrito, que realiza trabalho negativo W_{at}. A energia mecânica diminui ($\Delta E_{mec} = W_{at} < 0$), o raio diminui, e o satélite **acelera**:

$$\Delta E_c = -\Delta E_{mec} = |W_{at}| > 0, \qquad \Delta E_p = 2\,\Delta E_{mec} = -2\,|W_{at}|.$$

Ao descer em espiral, a gravidade realiza trabalho positivo igual a $2|W_{at}|$: metade compensa a energia retirada pelo atrito e a outra metade aumenta a energia cinética. Por isso a Estação Espacial perde altitude lentamente e precisa ligar os motores de tempos em tempos para voltar à órbita original.

1.8.7 Energia de ligação e mudança de órbita

A **energia de ligação** é a energia mínima que se deve fornecer a um corpo para levá-lo ao infinito com velocidade nula (E_{mec} final igual a zero). Para um satélite em órbita circular de raio r, ela é $E_{lig} = -E_{mec} = \dfrac{GMm}{2r}$. Para um corpo em repouso na superfície (desprezando a rotação), é $\dfrac{GMm}{R}$.

Para levar um satélite de uma órbita circular de raio r_1 para outra de raio $r_2 > r_1$, o trabalho mínimo das forças externas (motores) é a variação da energia mecânica:

$$W = \Delta E_{mec} = -\frac{GMm}{2r_2} - \left(-\frac{GMm}{2r_1}\right) = \frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Exemplo. Um satélite de 500 kg está em órbita circular de raio $r_1 = 7{,}0 \times 10^6$ m e deve ser levado à órbita geoestacionária, $r_2 = 4{,}2 \times 10^7$ m. Calcule a energia mínima necessária e compare as energias cinéticas.

Resolução:

1. **Energia mecânica inicial:** $E_1 = -\dfrac{4{,}0 \times 10^{14} \cdot 500}{2 \cdot 7{,}0 \times 10^6} \approx -1{,}43 \times 10^{10}$ J.

2. **Energia mecânica final:** $E_2 = -\dfrac{4{,}0 \times 10^{14} \cdot 500}{2 \cdot 4{,}2 \times 10^{7}} \approx -0{,}24 \times 10^{10}$ J.
3. **Trabalho mínimo:** $W = E_2 - E_1 \approx 1{,}19 \times 10^{10}$ J.
4. **Energias cinéticas** ($E_c = -E_{mec}$): caem de $1{,}43 \times 10^{10}$ J para $0{,}24 \times 10^{10}$ J; as velocidades passam de $7{,}6$ km/s para $3{,}1$ km/s. A energia potencial aumenta $2W \approx 2{,}4 \times 10^{10}$ J.

Resposta: $W \approx 1{,}2 \times 10^{10}$ J, embora o satélite termine mais lento

1.8.8 Órbita elíptica

Na órbita elíptica, a distância e a velocidade variam, mas a energia mecânica e o momento angular se conservam. No perigeu e no apogeu, a velocidade é perpendicular ao raio, e as duas leis de conservação fornecem um sistema:

$$v_p\, r_p = v_a\, r_a \qquad \text{e} \qquad \frac{m v_p^2}{2} - \frac{GMm}{r_p} = \frac{m v_a^2}{2} - \frac{GMm}{r_a}.$$

Substituindo $v_a = v_p\, r_p / r_a$ na equação da energia e isolando v_p:

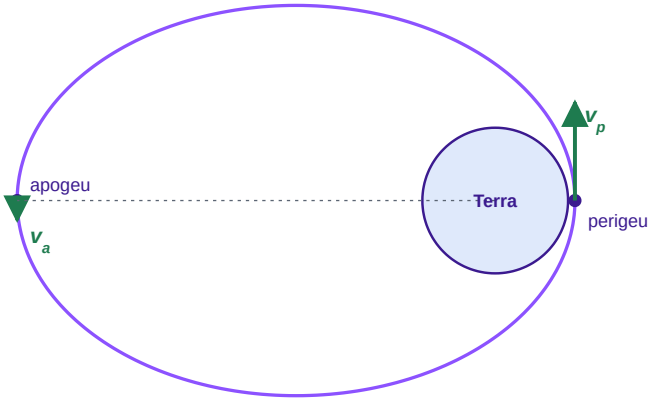
$$v_p^2 = \frac{2GM\, r_a}{r_p\,(r_p + r_a)}, \qquad v_a^2 = \frac{2GM\, r_p}{r_a\,(r_p + r_a)}.$$

Levando v_p^2 à expressão da energia no perigeu, $E_{mec} = \dfrac{GMm\, r_a}{r_p(r_p + r_a)} - \dfrac{GMm}{r_p} = -\dfrac{GMm}{r_p + r_a}$. Como $r_p + r_a = 2a$:

ENERGIA NA ÓRBITA ELÍPTICA

$$E_{mec} = -\frac{GMm}{2a}.$$

A energia depende apenas do semieixo maior: é a expressão da órbita circular com r trocado por a. Órbitas de mesmo a têm a mesma energia e, pela 3ª lei, o mesmo período.



$r_p = 7{,}0 \times 10^6$ m; $r_a = 4{,}2 \times 10^7$ m

Órbita elíptica que liga uma órbita baixa à órbita geoestacionária (órbita de transferência). A Terra ocupa um dos focos.

Exemplo. O satélite do exemplo anterior passa da órbita baixa à geoestacionária por uma órbita elíptica com perigeu $r_p = 7{,}0 \times 10^6$ m e apogeu $r_a = 4{,}2 \times 10^7$ m. Calcule as velocidades no perigeu e no apogeu.

Resolução:

1. **Semieixo maior:** $a = \dfrac{7{,}0 \times 10^6 + 4{,}2 \times 10^7}{2} = 2{,}45 \times 10^7$ m.
2. **Perigeu:** $v_p^2 = \dfrac{2 \cdot 4{,}0 \times 10^{14} \cdot 4{,}2 \times 10^7}{7{,}0 \times 10^6 \cdot 4{,}9 \times 10^7} \approx 9{,}8 \times 10^7$ m²/s², logo $v_p \approx 9{,}9$ km/s.
3. **Apogeu** (momento angular): $v_a = v_p \dfrac{r_p}{r_a} = 9{,}9 \cdot \dfrac{7{,}0}{42} \approx 1{,}65$ km/s.
4. **Conferência pela energia:** $E_{mec} = -\dfrac{GMm}{2a} = -\dfrac{4{,}0 \times 10^{14} \cdot 500}{4{,}9 \times 10^7} \approx -4{,}1 \times 10^9$ J, entre os valores das órbitas circulares inicial e final.

Resposta: $v_p \approx 9{,}9$ km/s e $v_a \approx 1{,}65$ km/s

Na órbita circular de $7{,}0 \times 10^6$ m, a velocidade é $7{,}6$ km/s; o motor deve aumentá-la para $9{,}9$ km/s no perigeu. No apogeu, o satélite chega com $1{,}65$ km/s e precisa ser acelerado para $3{,}1$ km/s, a velocidade da órbita geoestacionária. Essa sequência de dois impulsos é a **manobra de Hohmann**.

Equação vis-viva. Combinando a conservação da energia com $E_{mec} = -\dfrac{GMm}{2a}$, obtém-se a velocidade em qualquer ponto da órbita, a uma distância r do centro:

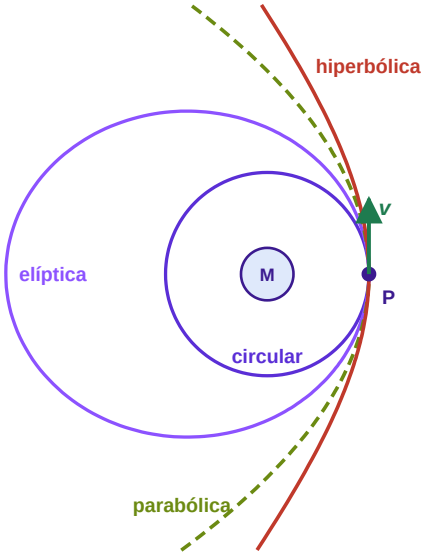
$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Na órbita circular ($r = a$), ela se reduz a $v^2 = GM/r$. Ela é útil em questões do ITA e do IME, mas os problemas usuais se resolvem com as duas leis de conservação.

1.8.9 Classificação das trajetórias pela energia

Um corpo sujeito apenas à atração de um astro descreve uma cônica com o astro num dos focos. O tipo de cônica depende do sinal da energia mecânica:

Energia mecânica	Trajetória	Situação
$E_{mec} < 0$	circunferência ou elipse	corpo ligado ao astro (planetas, satélites)
$E_{mec} = 0$	parábola	caso limite ($v = v_e$): chega ao infinito com velocidade nula
$E_{mec} > 0$	hipérbole	escapa e chega ao infinito com velocidade não nula



Mesmo ponto P, velocidades crescentes: circular, elíptica, parabólica, hiperbólica

Trajetórias de corpos que passam pelo mesmo ponto P, com velocidade perpendicular ao raio. A circular tem $v = v_{orb}$; a elíptica, $v_{orb} < v < v_e$; a parabólica, $v = v_e$; a hiperbólica, $v > v_e$.

Se o corpo for lançado em P, perpendicularmente ao raio, com velocidade **menor** que a orbital, a trajetória também é uma elipse, mas com P no ponto mais afastado (apogeu); se o perigeu ficar abaixo da superfície, o corpo colide com o planeta, como os projéteis A, B e C do canhão de Newton. Na trajetória hiperbólica, a velocidade a grande distância é $v_\infty = \sqrt{v^2 - v_e^2}$, com v_e calculada no ponto de lançamento, resultado obtido pela conservação da energia.

1.9 Velocidade de escape

> **DEFINIÇÃO**
>
> **Velocidade de escape** é a menor velocidade com que um corpo deve ser lançado da superfície de um astro para se afastar indefinidamente dele, sem nenhuma propulsão depois do lançamento. Desprezam-se a resistência do ar e a atração de outros astros.

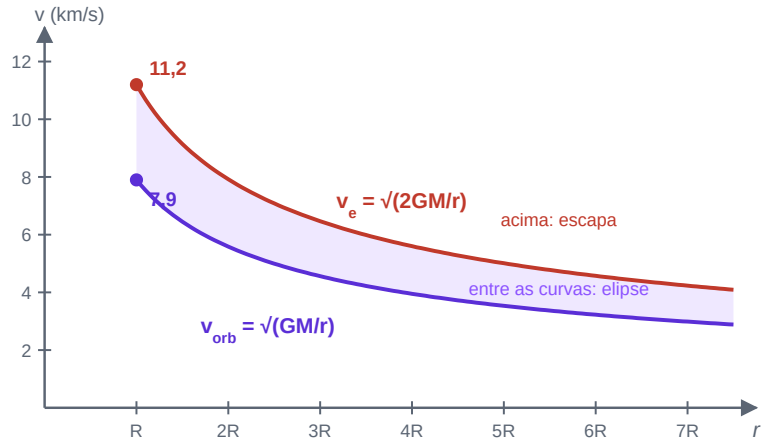
Dedução. Logo após o lançamento, a energia mecânica é $\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R}$. Muito longe, $E_p = 0$ e a energia cinética é, no mínimo, zero. Pela conservação da energia, o corpo escapa se $E_{mec} \geq 0$. O valor mínimo corresponde a $E_{mec} = 0$:

$$\frac{mv_e^2}{2} - \frac{GMm}{R} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2g_0 R}}$$

Para a Terra, $v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot 4{,}0 \times 10^{14}}{6{,}4 \times 10^{6}}} \approx 1{,}12 \times 10^{4}$ m/s $= 11{,}2$ km/s (cerca de $40\,000$ km/h); com $g_0 = 10$ m/s², $\sqrt{2g_0R} \approx 11{,}3$ km/s. De um ponto a uma distância r do centro, vale o mesmo raciocínio com r no lugar de R: $v_e = \sqrt{2GM/r}$.

Astro	Massa (kg)	Raio (m)	g na superfície (m/s²)	v_e (km/s)
Terra	$6{,}0 \times 10^{24}$	$6{,}4 \times 10^{6}$	$9{,}8$	$11{,}2$
Lua	$7{,}4 \times 10^{22}$	$1{,}74 \times 10^{6}$	$1{,}6$	$2{,}4$
Marte	$6{,}4 \times 10^{23}$	$3{,}4 \times 10^{6}$	$3{,}7$	$5{,}0$
Júpiter	$1{,}9 \times 10^{27}$	$7{,}0 \times 10^{7}$	26	60
Sol	$2{,}0 \times 10^{30}$	$7{,}0 \times 10^{8}$	$2{,}7 \times 10^{2}$	$6{,}2 \times 10^{2}$

- **Não depende da massa** do corpo lançado: m se cancela. Um grão de areia e um foguete precisam da mesma velocidade.
- **Não depende da direção** de lançamento, pois a energia é uma grandeza escalar, desde que a trajetória não intercepte o planeta e a atmosfera seja desprezada. Na prática, a rotação da Terra favorece os lançamentos para leste.
- **Relação com a órbita rasante:** $v_e = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\dfrac{GM}{R}} = \sqrt{2}\, v_1 \approx 1{,}41 \cdot 7{,}9 \approx 11{,}2$ km/s. Em qualquer raio, a velocidade de escape é $\sqrt{2}$ vezes a velocidade da órbita circular naquele raio.



Velocidade orbital e velocidade de escape em função da distância ao centro da Terra. A razão entre as duas curvas é sempre $\sqrt{2}$.

Escapar a partir de uma órbita. Um satélite em órbita circular de raio r tem $E_{mec} = -\dfrac{GMm}{2r}$. Para escapar, precisa receber a energia de ligação $\dfrac{GMm}{2r}$, que é igual à sua energia cinética: a energia cinética deve dobrar e a velocidade deve ser multiplicada por $\sqrt{2}$. O acréscimo de velocidade, aplicado na direção do movimento, é $\Delta v = (\sqrt{2} - 1)\, v_{orb} \approx 0{,}41\, v_{orb}$. Na altitude da Estação Espacial, $v_{orb} = 7{,}7$ km/s, a velocidade de escape local é $10{,}8$ km/s e $\Delta v \approx 3{,}2$ km/s, muito menos que os $11{,}2$ km/s necessários a partir do repouso na superfície. Por isso as sondas costumam ser colocadas antes numa órbita baixa.

Exemplo. Um projétil é lançado verticalmente da superfície da Terra com $v_0 = 5{,}0$ km/s. Desprezando o ar, calcule a altura máxima.

Resolução:

1. **Conservação da energia** (no ponto mais alto, $v = 0$): $\dfrac{mv_0^2}{2} - \dfrac{GMm}{R} = -\dfrac{GMm}{r_{\text{máx}}}$.
2. **Isolando:** $\dfrac{1}{r_{\text{máx}}} = \dfrac{1}{R} - \dfrac{v_0^2}{2GM} = \dfrac{1}{6{,}4 \times 10^{6}} - \dfrac{(5{,}0 \times 10^{3})^2}{8{,}0 \times 10^{14}} = 1{,}5625 \times 10^{-7} - 0{,}3125 \times 10^{-7} = 1{,}25 \times 10^{-7}$ m⁻¹.

3. **Distância ao centro:** $r_{\text{máx}} = 8{,}0 \times 10^6$ m; altura $h = r_{\text{máx}} - R = 1{,}6 \times 10^6$ m $= 1600$ km.
4. **Comparação:** com g constante, $h = \dfrac{v_0^2}{2g_0} = 1250$ km. O valor correto é maior porque a gravidade enfraquece durante a subida.

Resposta: $h \approx 1{,}6 \times 10^6$ m

Um caso particular útil: lançando verticalmente com $v_0 = v_1 = \sqrt{GM/R}$ (velocidade da órbita rasante), a conservação da energia dá $r_{\text{máx}} = 2R$, isto é, o corpo sobe até uma altura igual ao raio do planeta.

Por que a Lua não tem atmosfera. As moléculas de um gás se movem com velocidades da ordem de $\sqrt{3kT/m_0}$ (k é a constante de Boltzmann e m_0, a massa da molécula). Para o nitrogênio ($\mathrm{N_2}$), essa velocidade é de cerca de $0{,}5$ km/s a 300 K e $0{,}6$ km/s a 390 K, temperatura da superfície lunar iluminada; para o hidrogênio ($\mathrm{H_2}$) a 300 K, cerca de $1{,}9$ km/s. Uma parte das moléculas é bem mais rápida que a média, e, ao longo de bilhões de anos, um planeta só retém um gás cuja velocidade molecular média seja menor que cerca de $1/6$ da velocidade de escape. Na Terra, $v_e/6 \approx 1{,}9$ km/s: o nitrogênio e o oxigênio ficam, mas o hidrogênio e o hélio escapam lentamente, sobretudo na alta atmosfera, onde a temperatura passa de 1000 K. Na Lua, $v_e/6 \approx 0{,}4$ km/s, menor que a velocidade média de qualquer gás comum: a Lua não conseguiu reter atmosfera.

CURIOSIDADE: BURACO NEGRO

Se um astro fosse tão compacto que sua velocidade de escape igualasse a velocidade da luz c, nem a luz escaparia. Fazendo $v_e = c$ na expressão clássica:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \qquad \text{(raio de Schwarzschild)}.$$

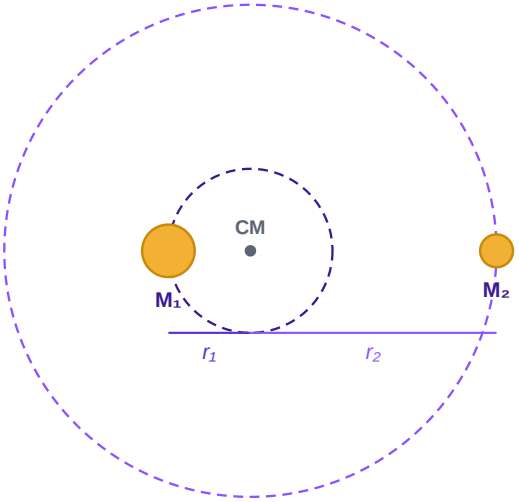
Para a Terra, $R_S = \dfrac{2 \cdot 4{,}0 \times 10^{14}}{(3{,}0 \times 10^8)^2} \approx 8{,}9 \times 10^{-3}$ m: toda a massa da Terra teria de caber numa esfera de cerca de 9 mm de raio. Para o Sol, $R_S \approx 3$ km. A dedução correta exige a Relatividade Geral, que leva à mesma expressão.

ERROS COMUNS

(1) Usar a altitude h no lugar da distância ao centro $r = R + h$ em $v_e = \sqrt{2GM/r}$. (2) Achar que a velocidade de escape depende da massa do corpo ou da direção do lançamento. (3) Achar que escapar exige motores ligados o tempo todo: v_e se refere a um lançamento único, seguido de movimento livre. Um foguete com propulsão contínua pode se afastar com qualquer velocidade, desde que mantenha os motores funcionando. (4) Achar que, ao atingir v_e, o corpo deixa de ser atraído: a atração continua e o corpo vai perdendo velocidade, que tende a zero muito longe. (5) Confundir escapar da Terra com escapar do Sistema Solar: na distância da Terra ao Sol, a velocidade de escape do Sol é $\sqrt{2GM_S/r} \approx 42$ km/s.

1.10 Sistemas binários e centro de massa

Quando as duas massas são comparáveis (duas estrelas ou, numa descrição mais precisa, o par Terra–Lua), nenhuma fica parada: as duas giram em torno do **centro de massa** (CM), com o **mesmo período** e sempre em lados opostos do CM.



$M_1 r_1 = M_2 r_2$ · mesmo período T · $D = r_1 + r_2$

Estrelas de massas M_1 e M_2 separadas por $D = r_1 + r_2$.

- Posição do CM: $M_1 r_1 = M_2 r_2 \Rightarrow r_1 = \dfrac{M_2}{M_1 + M_2} D$ e $r_2 = \dfrac{M_1}{M_1 + M_2} D$ (a estrela de maior massa fica mais perto do CM).
- Para a estrela 1: $\dfrac{G M_1 M_2}{D^2} = M_1 \omega^2 r_1 \Rightarrow \boxed{T = 2\pi \sqrt{\dfrac{D^3}{G(M_1 + M_2)}}}$. É a 3ª lei com a **soma** das massas e a distância entre as estrelas.
- Massas iguais: $r_1 = r_2 = D/2$ e $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{D^3}{2GM}}$.
- Se $M_1 \gg M_2$, a soma $M_1 + M_2$ é praticamente M_1 e o corpo maior fica quase parado no CM: volta-se ao caso do satélite em torno de um astro fixo.

Exemplo. Onde fica o centro de massa do sistema Terra–Lua? Use $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}$ kg, $M_L = 7{,}4 \times 10^{22}$ kg e $D = 3{,}84 \times 10^{8}$ m.

Resolução: A distância do CM ao centro da Terra é $r_T = \dfrac{M_L}{M_T + M_L} D = \dfrac{7{,}4 \times 10^{22}}{6{,}07 \times 10^{24}} \cdot 3{,}84 \times 10^{8} \approx 4{,}7 \times 10^{6}$ m. Como $r_T < R = 6{,}4 \times 10^{6}$ m, o CM fica dentro da Terra, cerca de 1700 km abaixo da superfície. O centro da Terra descreve, a cada mês, uma pequena circunferência em torno desse ponto.

Resposta: a cerca de $4{,}7 \times 10^{6}$ m do centro da Terra

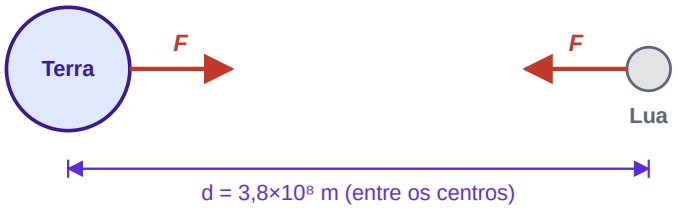
1.11 Quadro-resumo

Assunto	Fórmula / ideia
1ª lei	Elipse com o Sol num foco; $a = \frac{r_p + r_a}{2}$; $e = c/a$
2ª lei	Áreas iguais em tempos iguais; $v_p r_p = v_a r_a$
3ª lei	$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$ (mesmo astro central)
Gravitação	$F = \frac{GMm}{d^2}$
Campo	$g = \frac{GM}{r^2}$; $GM = g_0 R^2$; dentro: $g = g_0 \frac{r}{R}$
Órbita circular	$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = R\sqrt{\frac{g_0}{r}}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$; rasante: $v_1 = \sqrt{g_0 R} \approx 7{,}9$ km/s
Geoestacionário	Plano do equador, mesmo sentido da rotação, $T = 1$ dia sideral; $r \approx 4{,}2 \times 10^7$ m, $h \approx 3{,}6 \times 10^7$ m
Energia potencial	$E_p = -\frac{GMm}{r}$ (zero no infinito); $\Delta E_p \approx mgh$ se $h \ll R$
Energias (circular)	$E_c = \frac{GMm}{2r}$; $E_p = -\frac{GMm}{r}$; $E = -\frac{GMm}{2r}$; mudança de órbita: $W = \Delta E$
Órbita elíptica	$E = -\frac{GMm}{2a}$; $v_p r_p = v_a r_a$; $v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$
Trajetórias	$E < 0$: elipse/circunferência; $E = 0$: parábola; $E > 0$: hipérbole
Escape	$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2 g_0 R} = \sqrt{2}\, v_1 \approx 11{,}2$ km/s
Binário	$T = 2\pi\sqrt{\frac{D^3}{G(M_1 + M_2)}}$; $M_1 r_1 = M_2 r_2$

2. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Quando não for dito o contrário, use $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m²/kg², $g_0 = 10$ m/s² e raio da Terra $R = 6{,}4 \times 10^6$ m.

Exercício resolvido 1. Calcule a intensidade da força de atração entre a Terra ($M_T = 6 \times 10^{24}$ kg) e a Lua ($M_L = 7{,}4 \times 10^{22}$ kg), cujos centros estão a $3{,}8 \times 10^{8}$ m.



Resolução:

1. **Lei de Newton:** $F = \dfrac{GM_TM_L}{d^2}$.
2. **Numerador:** $6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 6 \times 10^{24} \cdot 7{,}4 \times 10^{22} \approx 2{,}96 \times 10^{37}$.
3. **Denominador:** $(3{,}8 \times 10^{8})^2 = 1{,}444 \times 10^{17}$.
4. **Divida:** $F \approx \dfrac{2{,}96 \times 10^{37}}{1{,}444 \times 10^{17}} \approx 2{,}0 \times 10^{20}$ N. A mesma força age sobre a Terra (ação e reação).

Resposta: $F \approx 2{,}0 \times 10^{20}$ N

Exercício resolvido 2. O semieixo maior da órbita de Marte é $1{,}52$ UA. Qual é o período de Marte, em anos terrestres?

Resolução:

1. **Mesmo astro central (o Sol):** podemos comparar com a Terra, que tem $a = 1$ UA e $T = 1$ ano.
2. **3ª lei:** $\dfrac{T_M^2}{1{,}52^3} = \dfrac{1^2}{1^3} \Rightarrow T_M^2 = 1{,}52^3 \approx 3{,}51$.
3. **Raiz:** $T_M = \sqrt{3{,}51} \approx 1{,}87$ ano.

Resposta: $T \approx 1{,}9$ ano (cerca de 687 dias)

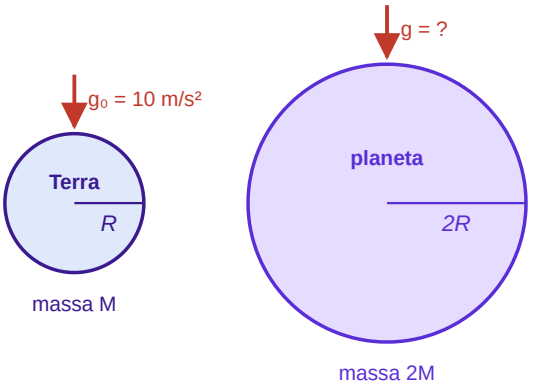
Exercício resolvido 3. (a) Quanto vale g a uma altitude igual ao raio da Terra? (b) A que altitude g vale metade do valor na superfície?

Resolução:

1. **Fórmula:** $g = g_0\left(\dfrac{R}{R+h}\right)^2$. A distância ao centro é $R + h$, não h.
2. **(a)** $h = R$: $g = g_0\left(\dfrac{R}{2R}\right)^2 = \dfrac{g_0}{4} = 2{,}5$ m/s².
3. **(b)** $\left(\dfrac{R}{R+h}\right)^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{R+h}{R} = \sqrt{2} \Rightarrow h = (\sqrt{2}-1)R \approx 0{,}41R \approx 2{,}65 \times 10^{6}$ m.

Resposta: (a) $2{,}5$ m/s²; (b) $h \approx 0{,}41R \approx 2\,650$ km

Exercício resolvido 4. Um planeta tem o dobro da massa da Terra e o dobro do raio. Qual é a gravidade na sua superfície? E se ele tivesse a mesma densidade da Terra e o dobro do raio?



Resolução:

1. **Razão:** $\dfrac{g_P}{g_T} = \dfrac{M_P}{M_T} \cdot \left(\dfrac{R_T}{R_P}\right)^2 = 2 \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow g_P = 5$ m/s².
2. **Mesma densidade:** $g = \frac{4}{3}\pi G \rho R$ é proporcional a R. Dobrando o raio, g dobra: 20 m/s². Verificação: a massa seria $2^3 = 8$ vezes maior, e $8 \cdot \frac{1}{4} = 2$.

Resposta: 5 m/s²; com a mesma densidade, 20 m/s²

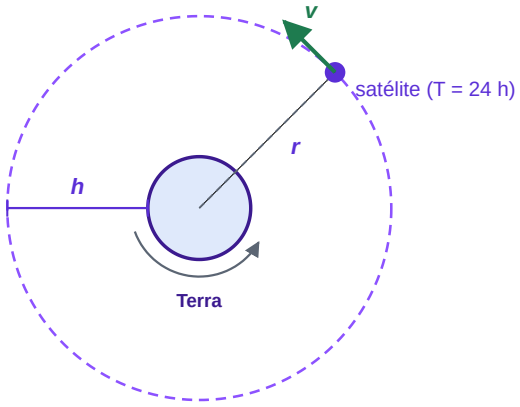
Exercício resolvido 5. Um satélite gira em órbita circular a uma altitude igual ao raio da Terra. Calcule sua velocidade e seu período.

Resolução:

1. **Raio da órbita:** $r = R + h = 2R = 1{,}28 \times 10^7$ m.
2. **Com $GM = g_0 R^2$:** $v = \sqrt{\dfrac{GM}{r}} = \sqrt{\dfrac{g_0 R^2}{2R}} = \sqrt{\dfrac{g_0 R}{2}} = \sqrt{3{,}2 \times 10^7} \approx 5{,}66 \times 10^3$ m/s.
3. **Período:** $T = \dfrac{2\pi r}{v} = \dfrac{2\pi \cdot 1{,}28 \times 10^7}{5{,}66 \times 10^3} \approx 1{,}42 \times 10^4$ s $\approx 3{,}9$ h.

Resposta: $v \approx 5{,}7$ km/s; $T \approx 3{,}9$ h

Exercício resolvido 6. Determine o raio da órbita e a altitude de um satélite geoestacionário. Use $T = 24$ h $= 86\,400$ s e $\pi^2 \approx 9{,}87$.



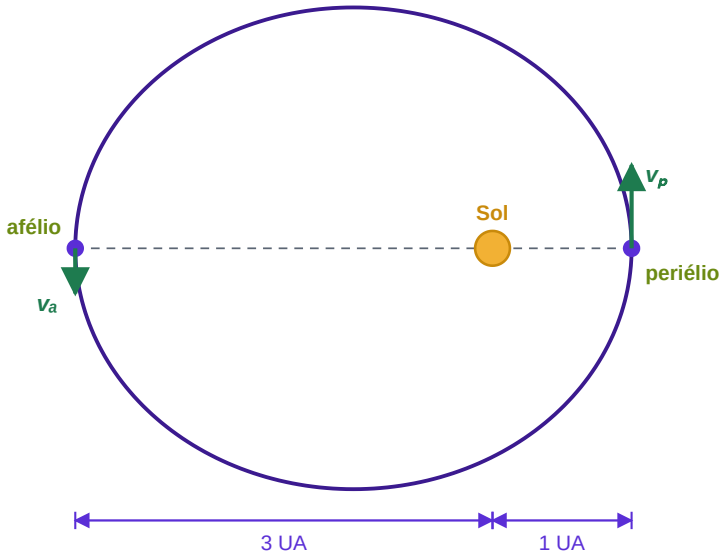
Vista a partir do polo norte (figura fora de escala).

Resolução:

1. **Condição:** período igual ao da rotação da Terra, $T = 86\,400$ s.
2. **3ª lei:** $r^3 = \dfrac{GMT^2}{4\pi^2}$, com $GM = g_0 R^2 = 10 \cdot (6{,}4 \times 10^6)^2 = 4{,}1 \times 10^{14}$ m³/s².
3. **Conta:** $r^3 = \dfrac{4{,}1 \times 10^{14} \cdot (8{,}64 \times 10^4)^2}{39{,}5} \approx 7{,}7 \times 10^{22}$ m³ $\Rightarrow r \approx 4{,}3 \times 10^7$ m.
4. **Altitude:** $h = r - R \approx 4{,}26 \times 10^7 - 0{,}64 \times 10^7 \approx 3{,}6 \times 10^7$ m.

Resposta: $r \approx 4{,}3 \times 10^7$ m; $h \approx 36\,000$ km (cerca de $6{,}7R$ do centro)

Exercício resolvido 7. Um asteroide tem órbita elíptica em torno do Sol com distância mínima 1 UA e máxima 3 UA. (a) Qual é a razão entre suas velocidades no periélio e no afélio? (b) Qual é seu período?



Resolução:

1. **2ª lei:** $v_p r_p = v_a r_a \Rightarrow \dfrac{v_p}{v_a} = \dfrac{r_a}{r_p} = 3.$
2. **Semieixo maior:** $a = \dfrac{1+3}{2} = 2$ UA. Na 3ª lei entra o semieixo maior, e não a distância mínima ou a máxima.
3. **3ª lei com a Terra:** $T^2 = a^3 = 8 \Rightarrow T = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8$ anos.

Resposta: (a) $v_p/v_a = 3$; (b) $T = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8$ anos

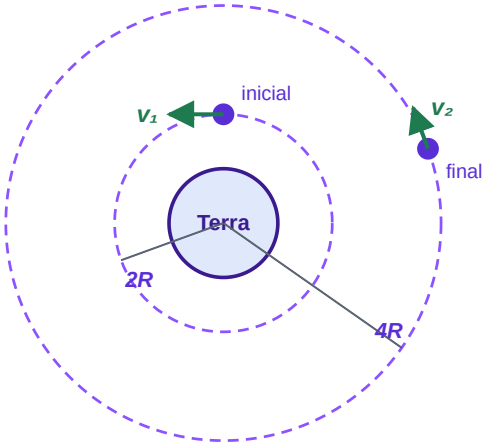
Exercício resolvido 8. Calcule a velocidade de escape da superfície da Terra. Compare com a velocidade de uma órbita rasante.

Resolução:

1. **Energia mecânica nula:** $\dfrac{mv_e^2}{2} = \dfrac{GMm}{R} \Rightarrow v_e = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}} = \sqrt{2g_0 R}.$
2. **Conta:** $v_e = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 6{,}4 \times 10^6} = \sqrt{1{,}28 \times 10^8} \approx 1{,}13 \times 10^4$ m/s.
3. **Rasante:** $v_1 = \sqrt{g_0 R} = 8{,}0 \times 10^3$ m/s. A razão é $\dfrac{v_e}{v_1} = \sqrt{2}.$

Resposta: $v_e \approx 11{,}3$ km/s $= \sqrt{2} \cdot v_{\text{rasante}}$

Exercício resolvido 9. Um satélite de $1\,000$ kg está em órbita circular de raio $2R$ e deve ser transferido para uma órbita circular de raio $4R$. Qual é a energia mínima necessária? O que acontece com a velocidade?



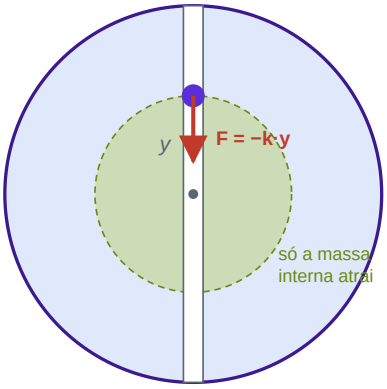
Resolução:

1. **Energia de cada órbita:** $E = -\dfrac{GMm}{2r}$. Com $GM = g_0R^2$: $E = -\dfrac{mg_0R^2}{2r}$.
2. **Inicial e final:** $E_1 = -\dfrac{mg_0R}{4}$ e $E_2 = -\dfrac{mg_0R}{8}$.
3. **Diferença:** $\Delta E = E_2 - E_1 = \dfrac{mg_0R}{8} = \dfrac{1000 \cdot 10 \cdot 6{,}4 \times 10^6}{8} = 8{,}0 \times 10^9$ J.
4. **Velocidade:** $v \propto \dfrac{1}{\sqrt{r}}$; dobrando o raio, v fica dividida por $\sqrt{2}$. O satélite ganha energia mecânica, mas perde energia cinética; a energia potencial aumenta o dobro do que a cinética diminui.

Resposta: $\Delta E = 8{,}0 \times 10^9$ J; a velocidade diminui ($v_2 = v_1/\sqrt{2}$)

Exercício resolvido 10 ITA/IME. Imagine um túnel retilíneo passando pelo centro da Terra (homogênea, sem atrito, sem ar). Uma pedra é solta na entrada. Mostre que ela executa um MHS e calcule o tempo para chegar ao outro lado.

Resolução:



túnel diametral

1. **Força no interior:** a uma distância y do centro, só atrai a massa interna: $g = g_0 \dfrac{y}{R}$. A força é $F = -\dfrac{m g_0}{R}\, y$ (sempre apontando para o centro).
2. **É MHS:** força restauradora proporcional ao deslocamento, $F = -ky$, com $k = \dfrac{m g_0}{R}$.
3. **Período:** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g_0}} = 2\pi\sqrt{6{,}4 \times 10^{5}} \approx 5{,}0 \times 10^{3}$ s ≈ 84 min.
4. **Travessia:** de um lado ao outro é meio período: ≈ 42 min. O período é igual ao de uma órbita rasante.

Resposta: MHS com $T = 2\pi\sqrt{R/g_0} \approx 84$ min; travessia em ≈ 42 min

3. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Dados, quando necessário: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m²/kg², $g_0 = 10$ m/s², $R_{Terra} = 6{,}4 \times 10^{6}$ m.

Nível 1 básico

01 Se a distância entre os centros de dois corpos for triplicada, a força gravitacional entre eles fica:

(A) 3 vezes maior.
(B) 3 vezes menor.
(C) 9 vezes maior.
(D) 9 vezes menor.
(E) inalterada.

02 Sobre a órbita de um planeta em torno do Sol: (a) Em que ponto o planeta é mais rápido? (b) Qual lei de Kepler justifica isso? (c) O Sol fica no centro da elipse?

03 Um planeta hipotético tem semieixo maior de 4 UA. Qual é o seu período, em anos terrestres?

04 Um planeta tem massa 4 vezes a da Terra e raio 2 vezes o da Terra. A gravidade na superfície dele é:

(A) $2{,}5$ m/s²
(B) 5 m/s²
(C) 10 m/s²
(D) 20 m/s²
(E) 40 m/s²

05 Explique por que os astronautas parecem flutuar dentro da Estação Espacial Internacional, embora a gravidade lá seja quase 90% da gravidade na superfície.

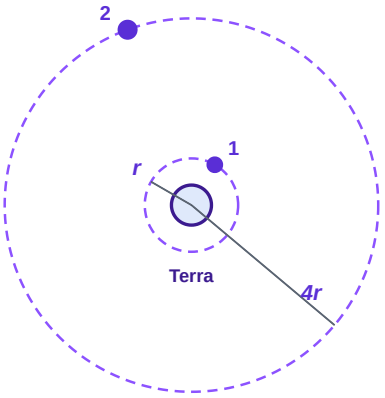
06 Calcule a força de atração entre duas esferas de 100 kg cujos centros estão a 1 m de distância. Ela é perceptível?

Nível 2 intermediário

07 A que altitude, em função do raio R da Terra, a gravidade vale $\frac{g_0}{9}$?

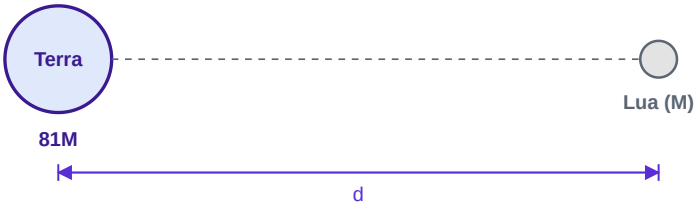
08 Calcule a velocidade e o período (em minutos) de um satélite em órbita rasante em torno da Terra.

09 Dois satélites giram em torno da Terra em órbitas circulares de raios r e $4r$. A razão T_2/T_1 entre os períodos e a razão v_2/v_1 entre as velocidades valem, respectivamente:



(A) 4 e $\frac{1}{4}$
(B) 8 e $\frac{1}{2}$
(C) 8 e 2
(D) 16 e $\frac{1}{2}$
(E) 64 e $\frac{1}{4}$

10 A massa da Terra é 81 vezes a da Lua e a distância entre seus centros é d. Em que ponto da reta Terra–Lua um corpo fica sujeito a força gravitacional resultante nula?



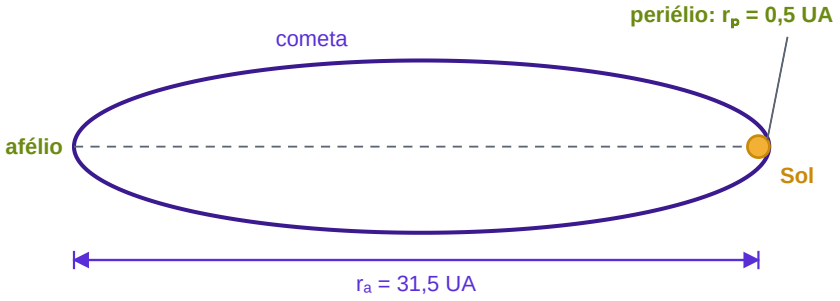
11 A Terra gira em torno do Sol em órbita aproximadamente circular de raio $1{,}5 \times 10^{11}$ m, com período de 1 ano ($3{,}15 \times 10^{7}$ s). Estime a massa do Sol.

12 Um planeta tem massa $\frac{1}{8}$ e raio $\frac{1}{2}$ dos da Terra. Sabendo que a velocidade de escape da Terra é $11{,}2$ km/s, a do planeta é:

(A) $2{,}8$ km/s
(B) $4{,}0$ km/s
(C) $5{,}6$ km/s
(D) $7{,}9$ km/s
(E) $11{,}2$ km/s

Nível 3 avançado

13 Um cometa tem distância mínima ao Sol de $0{,}5$ UA e máxima de $31{,}5$ UA. Calcule (a) seu período; (b) a razão entre as velocidades no periélio e no afélio.



Órbita do cometa em escala.

14 A que **profundidade** (dentro da Terra, suposta homogênea) a gravidade vale $\frac{g_0}{2}$? Compare com a **altitude** em que isso acontece.

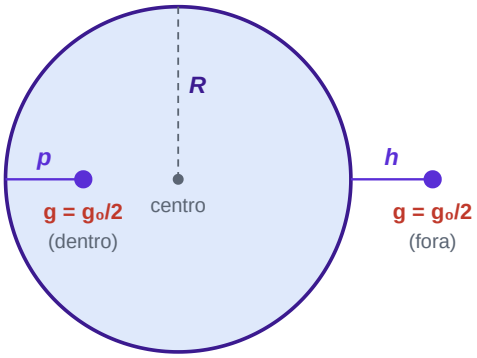
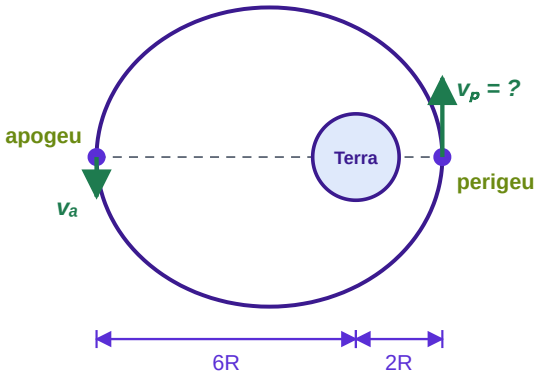


Figura fora de escala.

15 Qual é a energia mínima para levar um satélite de 500 kg, inicialmente em repouso na superfície da Terra, a uma órbita circular de raio $2R$? Despreze a rotação da Terra e a resistência do ar.

16 Um satélite descreve órbita elíptica em torno da Terra com perigeu a $2R$ e apogeu a $6R$ do centro. Usando a conservação da energia e a 2ª lei de Kepler, calcule a velocidade no perigeu.



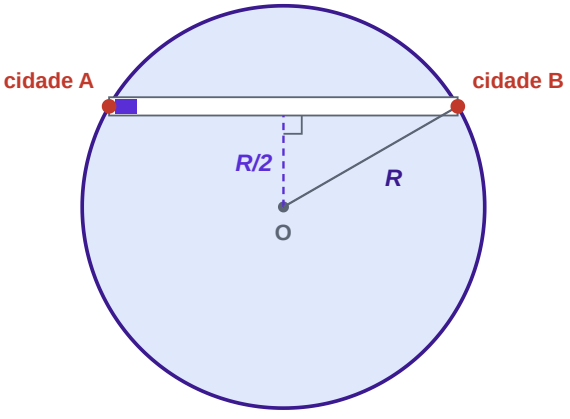
(A) $\approx 4{,}0$ km/s
(B) $\approx 5{,}7$ km/s
(C) $\approx 6{,}9$ km/s
(D) $\approx 8{,}0$ km/s
(E) $\approx 9{,}8$ km/s

17 Usando apenas g_0, R e G, calcule a densidade média da Terra. Compare com a densidade das rochas da superfície (cerca de $2{,}7$ g/cm³) e conclua algo sobre o interior do planeta.

Nível ITA/IME olímpico

18 Duas estrelas de massas M e $3M$, separadas por uma distância constante D, giram em torno do centro de massa comum. Determine (a) o raio da órbita de cada estrela; (b) o período do sistema; (c) a razão entre as energias cinéticas das estrelas.

19 Um túnel retilíneo e sem atrito liga duas cidades atravessando a Terra (homogênea) ao longo de uma corda que passa a uma distância $R/2$ do centro. Um carrinho é solto do repouso numa das extremidades. O tempo de viagem até a outra cidade é, aproximadamente:



túnel ao longo de uma corda

(A) 21 min
(B) 30 min
(C) 42 min
(D) 60 min
(E) 84 min

20 Um satélite em órbita circular baixa sofre atrito com a alta atmosfera e, depois de algumas voltas, sua energia mecânica fica 1% **mais negativa** (o módulo aumenta 1%). Supondo que a órbita continue praticamente circular, o que acontece com (a) o raio, (b) a velocidade e (c) a energia cinética? Dê as variações percentuais aproximadas.

21 Um projétil é lançado verticalmente da superfície da Terra com velocidade $v_0 = \sqrt{\dfrac{3g_0R}{2}}$. Desprezando o ar e a rotação, determine a altura máxima atingida, em função de R. Por que a resposta é diferente de $\dfrac{v_0^2}{2g_0}$?

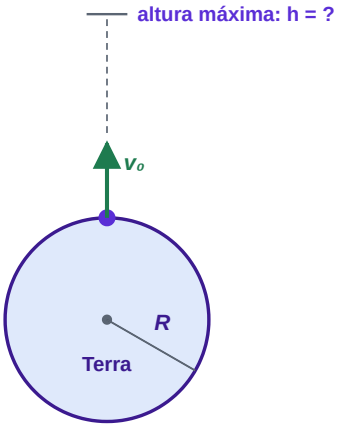


Figura fora de escala.

4. QUESTÕES OFICIAIS DE VESTIBULARES E CONCURSOS

Questões oficiais de provas anteriores: EFOMM, Escola Naval e EsPCEx (do banco de questões da Trilha Militares) e, ao final, questões da Unicamp, da Fuvest e do ITA.

22 [EFOMM 2021]

Um planeta perfeitamente esférico e de raio R tem aceleração da gravidade g em sua superfície. A aceleração da gravidade, em um ponto que está a uma altura h da superfície desse planeta, vale:

(A) g
(B) $gR^2/(R+h)^2$
(C) $gR/(R+h)$
(D) $g(R-h)^2/R^2$
(E) $g(R-h)/R$

23 [EsPCEx 2026]

A escolha da órbita de um satélite artificial pelas agências espaciais é fundamental para a missão à qual ele se destina e depende de fatores como a área da superfície da Terra que se pretende cobrir e a resolução pretendida das imagens obtidas pelo satélite. Considere um satélite artificial que esteja em órbita circular com velocidade escalar constante em torno da Terra, em uma altitude h. Sendo M e R a massa e o raio da Terra, respectivamente, e G a constante universal da gravitação, a expressão que determina o período de revolução T desse satélite em torno da Terra é:

(A) $T = \pi \cdot \sqrt{\dfrac{R^3}{G \cdot M}}$

(B) $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{R^3 + h^3}{G \cdot M}}$

(C) $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{(R + h)^3}{G \cdot M}}$

(D) $T = \pi \cdot \sqrt{\dfrac{h^3}{G \cdot M}}$

(E) $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{(R - h)^3}{G \cdot M}}$

24 [Escola Naval 2019]

A aceleração da gravidade ao nível do mar em nosso planeta vale aproximadamente 9,8 m/s². Na superfície de Plutão, cuja massa é 0,20% da massa da Terra e seu raio 80% menor que o raio da Terra, a aceleração da gravidade, em m/s², será aproximadamente igual a:

(A) 0,98
(B) 0,61
(C) 0,49
(D) 0,28
(E) 0,12

25 [EFOMM 2015]

Sabe-se que a distância média do planeta Terra ao Sol é de $1{,}5 \times 10^{11}$ m e a distância média do planeta Urano ao Sol é de 3×10^{12} m. Pode-se afirmar, então, que o período de revolução do planeta Urano, em anos terrestres, é aproximadamente

(A) $2\sqrt{5}$
(B) 20
(C) $40\sqrt{5}$
(D) 400
(E) 8000

26 [EFOMM 2019]

Um planeta possui distância ao Sol no afélio que é o dobro de sua distância ao Sol no periélio. Considere um intervalo de tempo Δt muito pequeno e assuma que o deslocamento efetuado pelo planeta durante esse pequeno intervalo de tempo é praticamente retilíneo. Dessa forma, a razão entre a velocidade média desse planeta no afélio e sua velocidade média no periélio, ambas calculadas durante o mesmo intervalo Δt, vale aproximadamente

(A) $\frac{1}{2}$
(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(C) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
(D) $\frac{1}{\sqrt{8}}$
(E) 2

27 [Escola Naval 2020]

Um planeta tem dois satélites naturais, A e B, em diferentes órbitas circulares. Sabendo que A orbita a uma distância r_A do centro do planeta com um período de translação T e que a distância média é r_B, qual é a velocidade orbital v_B de B em torno do planeta?

(A) $\frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{r_A^3}{r_B}}$
(B) $\frac{4\pi}{T}r_A\sqrt{\frac{1}{r_B}}$
(C) $\frac{2\pi}{T}r_A\sqrt{\frac{1}{r_B}}$
(D) $\frac{4\pi}{T}\sqrt{\frac{r_A^3}{r_B}}$
(E) $\frac{4\pi}{Tr_B}\sqrt{r_A^3}$

28 [EFOMM 2018]

Patrick é um astronauta que está em um planeta onde a altura máxima que atinge com seus pulos verticais é de 0,5 m. Em um segundo planeta, a altura máxima alcançada por ele é seis vezes maior. Considere que os dois planetas tenham densidades uniformes μ e $2\mu/3$, respectivamente. Determine a razão entre o raio do segundo planeta e o raio do primeiro.

(A) 1/2
(B) 1/4
(C) 1/6
(D) 1/8
(E) 1/10

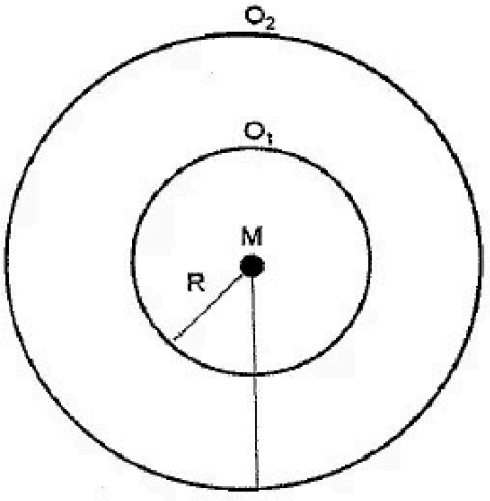
29 [Escola Naval 2021]

Dois satélites artificiais 1 e 2, cuja relação das massas $m_1/m_2 = 2$, estão em órbitas circulares ao redor de um planeta e têm seus períodos de translação relacionados por $T_2/T_1 = 2\sqrt{2}$. Calcule a relação entre as energias cinéticas E_{C1}/E_{C2} e assinale a opção correta.

(A) $\sqrt{2}$
(B) $2\sqrt[3]{2}$
(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(D) $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$
(E) 4

30 [Escola Naval 2024]

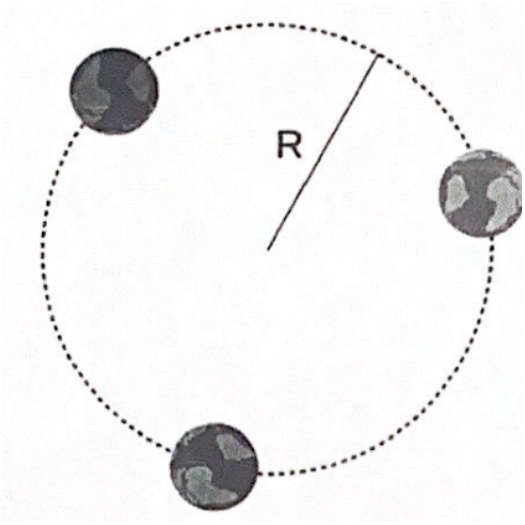
A figura acima mostra as órbitas, O_1 e O_2, de dois satélites, respectivamente, S_1 e S_2. Considere que os satélites estão orbitando um planeta de massa M, no mesmo sentido, em círculos coplanares. Seus períodos de revolução são, respectivamente, $T_1 = T$ e $T_2 = 8T$. Sabendo que o raio da órbita O_1 é R, calcule o módulo da velocidade de S_1 em relação a S_2 em um instante de menor separação entre os satélites e assinale a opção correta.



(A) $\frac{1}{4}\frac{\pi R}{T}$
(B) $\frac{1}{2}\frac{\pi R}{T}$
(C) $\frac{\pi R}{T}$
(D) $\frac{3}{2}\frac{\pi R}{T}$
(E) $2\frac{\pi R}{T}$

31 [EFOMM 2023]

Um sistema é composto por três corpos celestes esféricos e homogêneos, todos com a mesma massa M, que realizam uma órbita circular única de raio R, estando sujeitos apenas às interações gravitacionais entre si.



As distâncias entre todos os corpos são iguais e se mantêm constantes ao longo do movimento. Considerando G a constante gravitacional universal, quanto vale o módulo da velocidade de cada corpo?

(A) $\sqrt{\dfrac{GM}{2R}}$
(B) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}\,GM}{2R}}$
(C) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}\,GM}{R}}$
(D) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}\,GM}{3R}}$
(E) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}\,GM}{4R}}$

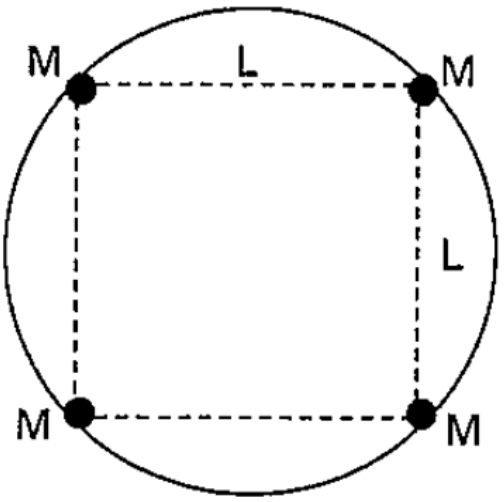
32 [Escola Naval 2022]

Duas partículas A e B de massas m e 2m, respectivamente, são liberadas a partir do repouso a uma distância d uma da outra. Em seguida as partículas se moverão exclusivamente sob o efeito da atração gravitacional mútua. Sendo G a constante gravitacional, quando a distância entre as partículas se reduzir a d/2, o módulo da velocidade de A será dado por:

(A) $\sqrt{\dfrac{Gm}{2d}}$
(B) $\sqrt{\dfrac{Gm}{3d}}$
(C) $2\sqrt{\dfrac{2Gm}{3d}}$
(D) $3\sqrt{\dfrac{Gm}{2d}}$
(E) $3\sqrt{\dfrac{3Gm}{2d}}$

33 [Escola Naval 2023]

Considere um sistema formado por quatro estrelas iguais, cada qual de massa M. Os centros dessas estrelas encontram-se nos vértices de um quadrado de lado L, conforme a figura acima, de tal forma que o sistema assim formado gira em torno do centro do quadrado com velocidade angular constante. Sendo G a constante gravitacional, se um meteorito de massa m passar pelo centro de massa do sistema, perpendicularmente ao plano da órbita, qual é a menor velocidade que o meteorito deve ter no centro de massa do sistema para poder escapar da atração gravitacional das estrelas?



(A) $2^{2/7}\sqrt{\frac{Gm}{L}}$

(B) $2^{7/4}\sqrt{\frac{GM}{L}}$

(C) $2\sqrt{\frac{2GM}{L}}$

(D) $\sqrt{\frac{7GM}{2L}}$

(E) $2\sqrt{\frac{Gm}{4L}}$

34 [EFOMM 2024]

O planeta X, esférico e com densidade homogênea, possui a mesma massa da Terra, metade do raio terrestre e período de rotação de 2 horas. Deseja-se colocar um objeto em órbita circular ao redor de X. Para tal, escolhe-se como local de lançamento um ponto desse planeta onde se utilize a menor quantidade possível de energia nessa tarefa. O lançamento é feito em uma direção paralela à superfície, a partir de uma pequena elevação de terra cuja altitude em relação ao nível do mar é muito pequena em comparação ao raio do planeta. Dessa forma, podemos fazer a aproximação de que o raio da órbita é igual ao raio de X. Empregando a mínima energia possível no lançamento, assinale a alternativa que corresponde ao intervalo que contém o módulo da velocidade em relação ao solo com que o objeto deve ser lançado. Dados: velocidade de escape da Terra: 11,2 km/s; velocidade de um ponto no equador da Terra em relação ao seu centro: 460 m/s.

(A) 7 km/s e 8 km/s

(B) 8 km/s e 9 km/s

(C) 9 km/s e 10 km/s

(D) 10 km/s e 11 km/s

(E) 11 km/s e 12 km/s

35 [EFOMM 2025]

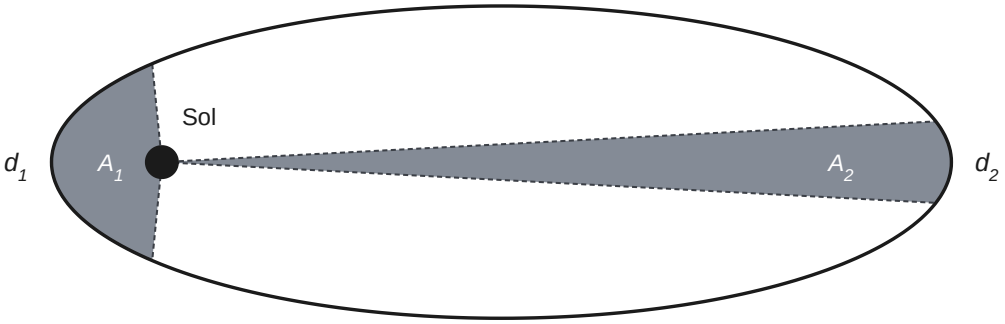
Um sistema é formado por duas estrelas de mesma massa que descrevem uma órbita plana e circular de raio R. O movimento ocorre ao redor do centro de massa do sistema e é devido unicamente à atração gravitacional mútua entre as estrelas, que estão sempre em pontos diametralmente opostos. Simultaneamente, um cosmonauta, sujeito apenas à força gravitacional das estrelas, descreve um movimento oscilatório com amplitude d, muito menor do que R, sobre a reta perpendicular ao plano da órbita que passa pelo centro da circunferência. Como $d \ll R$, considere que a distância entre o cosmonauta e qualquer das estrelas é sempre aproximadamente igual a R, durante a oscilação. A razão entre o período de oscilação do cosmonauta e o período de rotação do sistema estelar vale:

(A) $\sqrt{2}/4$
(B) $4\sqrt{2}$
(C) $2\sqrt{2}$
(D) $\sqrt{2}$
(E) $\sqrt{2}/2$

36 [Unicamp]

Em agosto de 2018 a Nasa lançou a Sonda Solar Parker, destinada a investigar o Sol, passando pela coroa solar. A sonda seguirá uma trajetória dando várias voltas em torno do Sol, em órbitas elípticas com grande excentricidade.

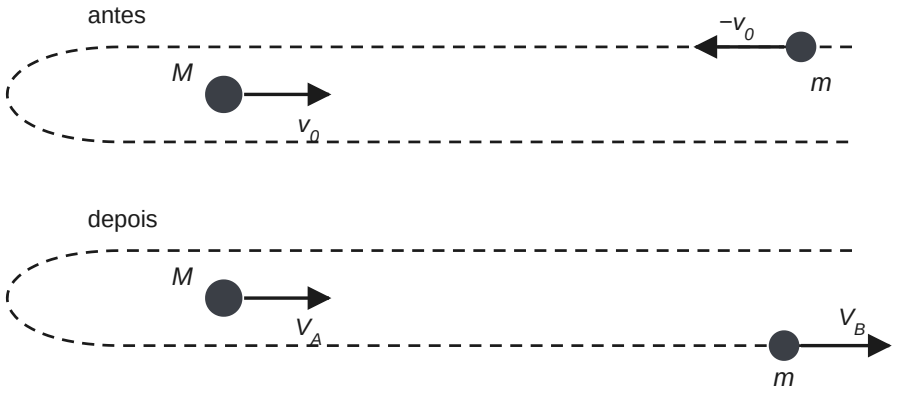
a) Considere um corpo que descreve uma órbita elíptica em torno do Sol, como ilustra a figura A. A área da elipse varrida pela linha que liga o corpo ao Sol no trecho 2 é o dobro da área varrida no trecho 1 ($A_2 = 2 \cdot A_1$); já as distâncias percorridas nos trechos são tais que $d_2 = 0{,}8 \cdot d_1$. Se a velocidade escalar média do corpo no trecho 1 é igual a $v_1 = 172\,000$ km/h, quanto vale a velocidade escalar média no trecho 2?



(A)

Figura A (reproduzida): áreas varridas nos trechos 1 e 2.

b) A sonda terá sua velocidade modificada (sem consumo adicional de combustível) nas passagens próximas ao planeta Vênus, explorando o efeito conhecido como catapulta gravitacional. Para ilustrar esse efeito, considere dois corpos de massas M e m, inicialmente com velocidades de mesmo módulo (v_0), mesma direção e sentidos contrários. Após a aproximação, os corpos se afastam com velocidades de módulos V_A e V_B, seguindo na mesma direção inicial, conforme mostra a figura B. Como a energia cinética se conserva, a velocidade de afastamento dos corpos é igual à de aproximação: $2v_0 = V_B - V_A$. Encontre a velocidade V_B da massa m em termos de M, m e v_0. Em seguida, use $M = 100\,m$ e encontre a razão $\dfrac{V_B}{V_0}$.



(B)

Figura B (reproduzida): catapulta gravitacional, antes e depois da aproximação.

37 [Fuvest]

Em janeiro de 2019, a sonda chinesa Chang'e 4 fez o primeiro pouso suave de um objeto terrestre no lado oculto da Lua, reavivando a discussão internacional sobre programas de exploração lunar.

Considere que a trajetória de uma sonda com destino à Lua passa por um ponto P, localizado a $\frac{2}{3}d_{TL}$ do centro da Terra e a $\frac{1}{3}d_{TL}$ do centro da Lua, sendo d_{TL} a distância entre os centros da Terra e da Lua.

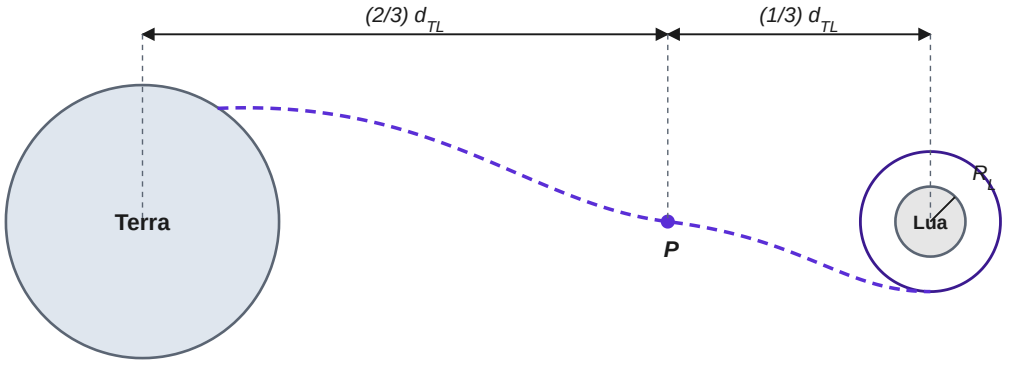


Figura (reproduzida): trajetória da sonda passando por P e órbita lunar circular de raio $2R_L$.

a) Considerando que a massa da Terra é cerca de 82 vezes maior que a massa da Lua, determine a razão $\frac{F_T}{F_L}$ entre os módulos da força gravitacional que a Terra e a Lua, respectivamente, exercem sobre a sonda no ponto P.

Ao chegar próximo à Lua, a sonda foi colocada em uma órbita lunar circular a uma altura igual ao raio da Lua (R_L), acima de sua superfície, como mostra a figura. Desprezando os efeitos da força gravitacional da Terra e de outros corpos celestes ao longo da órbita da sonda,

b) determine a velocidade orbital da sonda em torno da Lua em termos da constante gravitacional G, da massa da Lua M_L e do raio da Lua R_L;

c) determine a variação da energia mecânica da nave quando a altura da órbita, em relação à superfície da Lua, é reduzida para $0{,}5R_L$. Expresse seu resultado em termos de G, R_L, M_L e da massa da sonda m_S.

NOTE E ADOTE

O módulo da força gravitacional entre dois objetos de massas M e m separados por uma distância d é dado por $F = \frac{G\,m\,M}{d^2}$.

A energia potencial gravitacional correspondente é dada por $U = -\frac{G\,m\,M}{d}$.

Assuma a distância da Terra à Lua como sendo constante.

38 [ITA]

O raio do horizonte de eventos de um buraco negro corresponde à esfera dentro da qual nada, nem mesmo a luz, escapa da atração gravitacional por ele exercida. Por coincidência, esse raio pode ser calculado não relativisticamente como o raio para o qual a velocidade de escape é igual à velocidade da luz. Qual deve ser o raio do horizonte de eventos de um buraco negro com uma massa igual à massa da Terra?

> **DADOS**
>
> massa da Terra: $6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg; velocidade da luz no vácuo: $3{,}0 \cdot 10^{8}$ m/s; constante de gravitação universal: $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²/kg².

(A) 9 µm
(B) 9 mm
(C) 30 cm
(D) 90 cm
(E) 3 km

5. GABARITO COMENTADO

Exercícios propostos

Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.
01	D	04	C	09	B	12	C
16	C	19	C				

▼ Nível 1 (01 a 06)

01 (D). $F \propto \frac{1}{d^2}$: com $3d$, $F' = \frac{F}{9}$.

02. (a) No **periélio**, o ponto mais próximo do Sol. (b) 2ª lei (áreas iguais em tempos iguais): perto do Sol o raio vetor é curto e o arco percorrido no mesmo tempo precisa ser maior. (c) Não: o Sol ocupa um dos **focos**.

03. $T^2 = a^3 = 64 \Rightarrow T = 8$ anos.

04 (C). $\frac{g_P}{g_T} = 4 \cdot \frac{1}{2^2} = 1 \Rightarrow g_P = 10$ m/s².

05. A estação e os astronautas estão em **queda livre**, com a mesma aceleração g (a gravidade é a resultante centrípeta da órbita). Como caem juntos, o piso não empurra o astronauta: a normal é zero e o peso aparente é nulo, embora o peso (força gravitacional) continue atuando.

06. $F = \frac{6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 100 \cdot 100}{1^2} = 6{,}67 \times 10^{-7}$ N. É imperceptível, menor que o peso de um grão de poeira; forças dessa ordem só são medidas com instrumentos como a balança de torção de Cavendish.

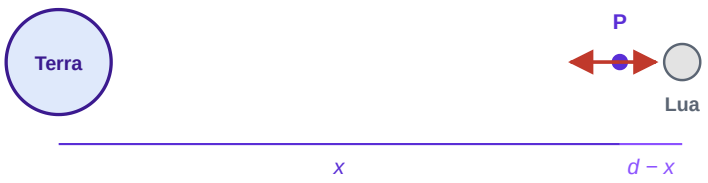
▼ Nível 2 (07 a 12)

07. $\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow R + h = 3R \Rightarrow h = 2R.$

08. $v = \sqrt{g_0 R} = \sqrt{6{,}4 \times 10^7} = 8{,}0 \times 10^3$ m/s. $T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}} \approx 5{,}0 \times 10^3$ s ≈ 84 min.

09 (B). $T \propto r^{3/2}$: $4^{3/2} = 8$. $v \propto r^{-1/2}$: $4^{-1/2} = \frac{1}{2}$.

10. Forças iguais a uma distância x da Terra: $\frac{G \cdot 81 M_L}{x^2} = \frac{G M_L}{(d-x)^2} \Rightarrow \frac{x}{d-x} = 9 \Rightarrow x = 0{,}9\,d$, isto é, a 90% da distância a partir da Terra, mais perto da Lua.



11. $M = \frac{4\pi^2 r^3}{G T^2} = \frac{39{,}5 \cdot (1{,}5 \times 10^{11})^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \cdot (3{,}15 \times 10^7)^2} \approx 2{,}0 \times 10^{30}$ kg.

12 (C). $v_e = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}} \propto \sqrt{\dfrac{M}{R}}$: $\sqrt{\dfrac{1/8}{1/2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow v_e = 5{,}6$ km/s.

▼ Nível 3 (13 a 17)

13. (a) $a = \dfrac{0{,}5 + 31{,}5}{2} = 16$ UA; $T^2 = 16^3 = 4096 \Rightarrow T = 64$ anos. (b) $\dfrac{v_p}{v_a} = \dfrac{r_a}{r_p} = \dfrac{31{,}5}{0{,}5} = 63$.

14. Dentro: $g = g_0\dfrac{r}{R} = \dfrac{g_0}{2} \Rightarrow r = \dfrac{R}{2}$, isto é, profundidade $\dfrac{R}{2} = 3\,200$ km. Fora (ex. resolvido 3): altitude $(\sqrt{2} - 1)R \approx 0{,}41R \approx 2\,650$ km. Acima da superfície, g diminui mais depressa (com $1/r^2$) do que abaixo dela (linearmente).

15. Energia inicial (repouso na superfície): $E_0 = -\dfrac{GMm}{R}$. Final (órbita $2R$): $E = -\dfrac{GMm}{4R}$. $\Delta E = \dfrac{3GMm}{4R} = \dfrac{3}{4}mg_0R = 0{,}75 \cdot 500 \cdot 10 \cdot 6{,}4 \times 10^6 = 2{,}4 \times 10^{10}$ J.

16 (C). Áreas: $v_a = v_p\dfrac{r_p}{r_a} = \dfrac{v_p}{3}$. Energia: $\dfrac{v_p^2}{2} - \dfrac{GM}{2R} = \dfrac{v_p^2}{18} - \dfrac{GM}{6R} \Rightarrow \dfrac{4v_p^2}{9} = \dfrac{GM}{3R} \Rightarrow v_p^2 = \dfrac{3GM}{4R} = \dfrac{3}{4}g_0R = 4{,}8 \times 10^7 \Rightarrow v_p \approx 6{,}9$ km/s.

17. $g_0 = \frac{4}{3}\pi G\rho R \Rightarrow \rho = \dfrac{3g_0}{4\pi GR} = \dfrac{30}{4\pi \cdot 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 6{,}4 \times 10^6} \approx 5{,}6 \times 10^3$ kg/m³ $= 5{,}6$ g/cm³. É o dobro da densidade das rochas da superfície: o interior (núcleo de ferro e níquel) é bem mais denso.

▼ Nível ITA/IME (18 a 21)

18. (a) $Mr_1 = 3Mr_2$ e $r_1 + r_2 = D \Rightarrow r_1 = \dfrac{3D}{4}$ (estrela leve) e $r_2 = \dfrac{D}{4}$ (estrela pesada). (b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{D^3}{G(M + 3M)}} = \pi\sqrt{\dfrac{D^3}{GM}}$. (c) Mesmo ω: $v = \omega r$. $\dfrac{E_{c1}}{E_{c2}} = \dfrac{M\,r_1^2}{3M\,r_2^2} = \dfrac{9}{3} = 3$. A estrela de menor massa tem energia cinética 3 vezes maior.

19 (C). Ao longo da corda, seja x a posição medida a partir do ponto médio da corda. A força gravitacional interna $\dfrac{mg_0}{R}\vec{r}$ tem componente ao longo do túnel $-\dfrac{mg_0}{R}x$ (a componente perpendicular é equilibrada pelas paredes). É MHS com o **mesmo** $\omega = \sqrt{g_0/R}$ do túnel diametral, qualquer que seja a corda. A viagem é meio período: $\pi\sqrt{R/g_0} \approx 42$ min.

20. $E = -\dfrac{GMm}{2r}$: $|E|$ aumenta $1\% \Rightarrow$ (a) r diminui cerca de 1% ($r' = r/1{,}01$). (b) $v \propto r^{-1/2} \Rightarrow v$ **aumenta** cerca de $0{,}5\%$. (c) $E_c = -E \Rightarrow$ a energia cinética **aumenta** 1%. O atrito retira energia mecânica; a energia potencial diminui o dobro do que a cinética aumenta.

21. Conservação com $E_p = -\dfrac{GMm}{r}$ e $GM = g_0R^2$: $\dfrac{v_0^2}{2} - g_0R = -\dfrac{g_0R^2}{r_{max}} \Rightarrow \dfrac{3}{4}g_0R - g_0R = -\dfrac{g_0R^2}{r_{max}} \Rightarrow r_{max} = 4R$, altura $h = 3R$. A fórmula $\dfrac{v_0^2}{2g_0} = 0{,}75R$ supõe g constante, o que não vale para alturas comparáveis ao raio. Como g diminui com a altura, o projétil sobe muito mais.

Questões oficiais

Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.
22	B	23	C	24	C	25	C
26	A	27	A	28	B	29	E
30	C	31	D	32	C	33	B
34	B	35	A				

▼ 22 a 35 – Questões oficiais

22 (B) · EFOMM 2021.

$$g = \frac{GM}{R^2}, \qquad g_h = \frac{GM}{(R+h)^2} \;\Rightarrow\; g_h = \frac{gR^2}{(R+h)^2}$$

23 (C) · EsPCEx 2026.

O raio da órbita é medido a partir do centro da Terra: $r = R + h$. A força gravitacional faz o papel de resultante centrípeta:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}}.$$

O resultado é a terceira lei de Kepler, $T^2 \propto r^3$, e não depende da massa do satélite.

24 (C) · Escola Naval 2019.

$g = \frac{GM}{R^2}$, com $M = 0{,}002\,M_T$ e $R = 0{,}2\,R_T$:

$$g_P = 9{,}8 \cdot \frac{0{,}002}{0{,}04} = 0{,}49\ \mathrm{m/s^2}$$

25 (C) · EFOMM 2015.

$$\frac{T_U^2}{T_T^2} = \left(\frac{R_U}{R_T}\right)^3 = 20^3 \;\Rightarrow\; T_U = 20\sqrt{20} = 40\sqrt{5} \approx 89\ \text{anos}$$

26 (A) · EFOMM 2019.

Pela 2ª lei de Kepler, áreas iguais em tempos iguais. Nos extremos a velocidade é perpendicular ao raio, e cada área é um triângulo fino:

$$\frac{1}{2} r_a v_a \Delta t = \frac{1}{2} r_p v_p \Delta t \;\Rightarrow\; \frac{v_a}{v_p} = \frac{r_p}{r_a} = \frac{1}{2}$$

27 (A) · Escola Naval 2020.

$$GM = \frac{4\pi^2 r_A^3}{T^2} \qquad v_B = \sqrt{\frac{GM}{r_B}} = \frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{r_A^3}{r_B}}$$

28 (B) · EFOMM 2018.

Com o mesmo impulso, $h = \frac{v^2}{2g}$: altura 6 vezes maior significa $g_2 = \frac{g_1}{6}$.

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho R \;\Rightarrow\; \frac{g_2}{g_1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{6} \;\Rightarrow\; \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{4}$$

29 (E) · Escola Naval 2021.

Pela 3ª lei de Kepler, $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3/2} = 2\sqrt{2} = 2^{3/2}$, logo $r_2 = 2r_1$.

$$E_C = \frac{GMm}{2r} \;\Rightarrow\; \frac{E_{C1}}{E_{C2}} = \frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{r_2}{r_1} = 2\cdot 2 = 4$$

30 (C) · Escola Naval 2024.

Pela 3ª lei de Kepler, $R_2 = R\cdot 8^{2/3} = 4R$.

$$v_1 = \frac{2\pi R}{T} \qquad v_2 = \frac{2\pi\cdot 4R}{8T} = \frac{\pi R}{T}$$

Na menor separação os satélites estão alinhados com o planeta e as velocidades são paralelas e de mesmo sentido: $v_{rel} = \frac{2\pi R}{T} - \frac{\pi R}{T} = \frac{\pi R}{T}$.

31 (D) · EFOMM 2023.

Os corpos formam um triângulo equilátero inscrito na circunferência: lado $\ell = R\sqrt{3}$. A resultante sobre cada um aponta para o centro:

$$F = 2\frac{GM^2}{3R^2}\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}\,GM^2}{3R^2} = \frac{Mv^2}{R} \;\Rightarrow\; v = \sqrt{\frac{\sqrt{3}\,GM}{3R}}$$

32 (C) · Escola Naval 2022.

Quantidade de movimento nula: $mv_A = 2mv_B$, logo $v_B = \frac{v_A}{2}$. A energia potencial perdida vira cinética:

$$\frac{2Gm^2}{d/2} - \frac{2Gm^2}{d} = \frac{mv_A^2}{2} + \frac{2m}{2}\cdot\frac{v_A^2}{4} \;\Rightarrow\; \frac{2Gm^2}{d} = \frac{3}{4}mv_A^2$$

$$v_A = \sqrt{\frac{8Gm}{3d}} = 2\sqrt{\frac{2Gm}{3d}}$$

33 (B) · Escola Naval 2023.

No centro, cada estrela está a $\frac{L}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{mv^2}{2} = 4\cdot\frac{GMm}{L/\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; v^2 = \frac{8\sqrt{2}\,GM}{L} = 2^{7/2}\frac{GM}{L} \;\Rightarrow\; v = 2^{7/4}\sqrt{\frac{GM}{L}}$$

34 (B) · EFOMM 2024.

Velocidade orbital rasante: $v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \frac{v_{esc}}{\sqrt{2}}$. Na Terra, $\frac{11{,}2}{\sqrt{2}} \approx 7{,}92$ km/s; em X, com metade do raio, $\sqrt{2}\cdot 7{,}92 \approx 11{,}2$ km/s (em relação ao centro).

A menor energia se consegue no equador, lançando no sentido da rotação. A velocidade do solo no equador de X é $460\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{24}{2} = 2760\,\mathrm{m/s}$.

$$v_{solo} = 11{,}2 - 2{,}76 \approx 8{,}4\,\mathrm{km/s}$$

35 (A) · EFOMM 2025.

Estrelas (distância $2R$ entre elas): $\frac{GM^2}{(2R)^2} = M\omega_s^2 R \Rightarrow \omega_s^2 = \frac{GM}{4R^3}$.

Cosmonauta a uma altura z sobre o eixo: cada estrela puxa com $\frac{GMm}{R^2}$ e a componente ao longo do eixo é essa força vezes $\frac{z}{R}$:

$$m\ddot{z} = -2\frac{GMm}{R^2}\cdot\frac{z}{R} \;\Rightarrow\; \omega_c^2 = \frac{2GM}{R^3}$$

$$\frac{T_c}{T_s} = \frac{\omega_s}{\omega_c} = \sqrt{\frac{1/4}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

▼ 36 – Unicamp (discursiva)

36 · Unicamp. Respostas: a) $v_2 = 68\,800$ km/h; b) $V_B = \dfrac{(3M - m)\,v_0}{M + m}$ e $\dfrac{V_B}{v_0} = \dfrac{299}{101} \approx 2{,}96$.

a) 2ª lei de Kepler.

1. Velocidade escalar média em cada trecho: $v_1 = \dfrac{d_1}{\Delta t_1}$ e $v_2 = \dfrac{d_2}{\Delta t_2}$. Dividindo: $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{d_2}{d_1} \cdot \dfrac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$.
2. Pela lei das áreas, a área varrida é proporcional ao tempo ($\Delta A / \Delta t$ constante). Como $A_2 = 2A_1$, então $\Delta t_2 = 2\,\Delta t_1$.
3. Substituindo: $\dfrac{v_2}{172\,000} = 0{,}8 \cdot \dfrac{1}{2} = 0{,}4 \;\Rightarrow\; v_2 = 68\,800$ km/h.

O resultado está de acordo com a 2ª lei: o trecho 2 fica longe do Sol (perto do afélio), onde o corpo é mais lento.

b) Quantidade de movimento e energia cinética (catapulta gravitacional).

1. Durante a aproximação só atuam forças internas (a atração gravitacional entre os dois corpos), então a quantidade de movimento do sistema se conserva. Adotando positivo para a direita: $Q_{\text{antes}} = Mv_0 - mv_0$ e $Q_{\text{depois}} = MV_A + mV_B$.
2. A conservação da energia cinética (a interação equivale a uma colisão elástica) leva à relação fornecida, $2v_0 = V_B - V_A$; logo, $V_A = V_B - 2v_0$.
3. Substituindo na conservação: $Mv_0 - mv_0 = M(V_B - 2v_0) + mV_B \Rightarrow (3M - m)\,v_0 = (M + m)\,V_B$.
4. Logo $V_B = \dfrac{(3M - m)\,v_0}{M + m}$. Com $M = 100m$: $\dfrac{V_B}{v_0} = \dfrac{300m - m}{100m + m} = \dfrac{299}{101} \approx 2{,}96$.

Interpretação: se $M \gg m$ (planeta e sonda), $V_B \to 3v_0$. A sonda sai com quase o triplo da velocidade sem gastar combustível; a energia que ela ganha é retirada do planeta, que perde uma parcela ínfima da sua.

▼ 37 – Fuvest (discursiva)

37 · Fuvest. Respostas: a) $\dfrac{F_T}{F_L} = 20{,}5$; b) $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_L}{2R_L}}$; c) $\Delta E_{mec} = -\dfrac{G\,m_S\,M_L}{12\,R_L}$.

a) Razão entre as forças em P.

1. Distâncias de P aos centros: $d_T = \frac{2}{3}d_{TL}$ (Terra) e $d_L = \frac{1}{3}d_{TL}$ (Lua).
2. Dividindo as duas forças, G e m_S se cancelam:

$$\frac{F_T}{F_L} = \frac{M_T}{M_L} \cdot \frac{d_L^2}{d_T^2} = \frac{M_T}{M_L} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}d_{TL}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}d_{TL}\right)^2} = \frac{M_T}{M_L} \cdot \frac{1}{4}.$$

3. Com $M_T = 82\,M_L$: $\dfrac{F_T}{F_L} = \dfrac{82}{4} = 20{,}5$. Mesmo estando duas vezes mais longe, a Terra ainda puxa a sonda com força cerca de 20 vezes maior que a da Lua.

b) Velocidade orbital.

1. A altura da órbita é R_L, então o raio da órbita (distância ao centro da Lua) é $r = R_L + R_L = 2R_L$.
2. A força gravitacional da Lua é a resultante centrípeta: $\dfrac{G\,M_L\,m_S}{r^2} = \dfrac{m_S\,v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{G\,M_L}{r}}$.

3. Logo $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_L}{2R_L}}$.

c) Variação da energia mecânica.

1. Em órbita circular de raio r: $E_c = \frac{1}{2}m_S v^2 = \dfrac{G\,M_L\,m_S}{2r}$ e $U = -\dfrac{G\,M_L\,m_S}{r}$, de modo que $E_{mec} = E_c + U = -\dfrac{G\,M_L\,m_S}{2r}$.
2. Órbita inicial: $r = 2R_L \Rightarrow E_{mec} = -\dfrac{G\,m_S\,M_L}{4R_L}$.
3. Órbita final: altura $0{,}5R_L$, logo $r' = 1{,}5R_L \Rightarrow E'_{mec} = -\dfrac{G\,m_S\,M_L}{3R_L}$.
4. $\Delta E_{mec} = E'_{mec} - E_{mec} = -\dfrac{G\,m_S\,M_L}{3R_L} + \dfrac{G\,m_S\,M_L}{4R_L} = -\dfrac{G\,m_S\,M_L}{12\,R_L}$.

Interpretação: a energia mecânica diminui (a variação é negativa): para descer a uma órbita mais baixa, a sonda precisa perder energia, o que se faz acionando os motores contra o movimento. Na órbita mais baixa ela fica mais rápida ($v' = \sqrt{GM_L/1{,}5R_L}$), embora tenha menos energia mecânica.

▼ 38 – ITA

38 (B) · ITA.

1. A velocidade de escape a partir da distância R do centro de um corpo de massa M vem da conservação da energia ($E_c + E_p = 0$): $v_{esc} = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$.
2. Impondo $v_{esc} = c$ e isolando R: $R = \dfrac{2GM}{c^2}$.
3. Com os dados: $R = \dfrac{2 \cdot (6{,}67 \cdot 10^{-11}) \cdot (6{,}0 \cdot 10^{24})}{(3{,}0 \cdot 10^{8})^2} \approx 8{,}9 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \approx 9\ \text{mm}$.

Interpretação: toda a massa da Terra teria de caber numa esfera do tamanho de uma bolinha de gude para que nem a luz escapasse. Esse é o raio de Schwarzschild, comentado na seção 1.9.