FICHA DE MATEMÁTICA

Função do 2º grau

Problemas de aplicação

Aluno(a): _____	**Data:** __/__/____	**Prof.:** Luis Teixeira

1. TEORIA

Nesta ficha, o objetivo é descrever situações do cotidiano por meio de **funções do 2º grau** e usar as propriedades da parábola (vértice, raízes, sinal, intersecções) para responder às perguntas. A maioria dos problemas pode ser resolvida com o roteiro a seguir.

1.1 Do problema à função

ROTEIRO

1. **Escolha a variável** x: a grandeza que pode variar (quantidade vendida, medida de um lado, tempo, desconto...). Escreva com palavras o que x significa.
2. **Monte a função** da grandeza pedida (lucro, área, altura, receita) em termos de x. Se necessário, faça um desenho ou uma tabela.
3. **Identifique o que é pedido:** vértice (maior/menor valor), raízes (quando vale zero), estudo do sinal (quando é positivo/negativo), igualar funções (quando duas grandezas coincidem).
4. **Interprete o resultado:** descarte valores incompatíveis com a situação (tempo negativo, medida negativa) e responda exatamente ao que foi perguntado, com a unidade.

Custo, receita e lucro. Em problemas de economia, são usadas três grandezas:

DEFINIÇÕES

- **Custo** $C(x)$: quanto se gasta para produzir x unidades.
- **Receita** $R(x)$: quanto entra com as vendas = preço $\times$ quantidade.
- **Lucro** $L(x) = R(x) - C(x)$.

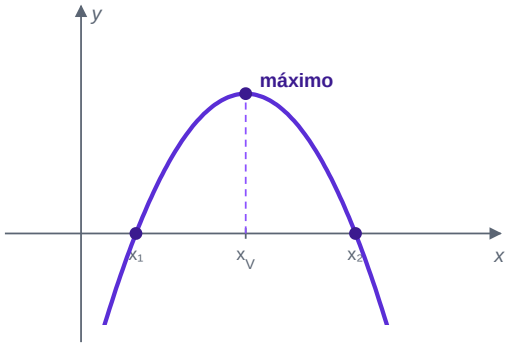
Quando o preço é fixo e o custo é formado por uma parte fixa mais um valor por unidade, essas funções são do 1º grau (veja a ficha *Função do 1º grau – Problemas de aplicação*). Se o preço diminui à medida que se vende mais (ou se o custo cresce mais depressa), a receita ou o lucro passam a ser funções do 2º grau, cujo gráfico é uma parábola com valor **máximo**.

ERRO COMUM

Em $L = R - C$, o sinal de menos se aplica a **todo** o custo: $R - (1200 + 20x) = R - 1200 - 20x$. Não distribuir esse sinal é um erro frequente.

1.2 Maior ou menor valor: o vértice

Quando a grandeza a otimizar é $f(x) = ax^2 + bx + c$, o maior ou o menor valor ocorre no **vértice**. A parábola é simétrica em relação à reta vertical que passa pelo vértice: de um lado desse eixo a função cresce e, do outro, decresce. Assim, o ponto mais alto (se $a < 0$) ou mais baixo (se $a > 0$) está sobre o eixo de simetria, cuja abscissa é a média das raízes:



A abscissa do vértice é a média das raízes: $x_V = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{b}{2a}$.

FÓRMULAS

$$x_V = -\frac{b}{2a} \qquad y_V = f(x_V) = -\frac{\Delta}{4a}$$

- Se $a < 0$ (concavidade para baixo), y_V é o **máximo**.
- Se $a > 0$ (concavidade para cima), y_V é o **mínimo**.

ATENÇÃO

Leia com cuidado o que é pedido. A pergunta "quantas unidades dão lucro máximo?" pede x_V; "qual é o lucro máximo?" pede y_V; "qual preço maximiza a receita?" depende da variável escolhida: se x é o **desconto**, o preço procurado é o preço original menos x_V.

1.3 Produto máximo com soma fixa

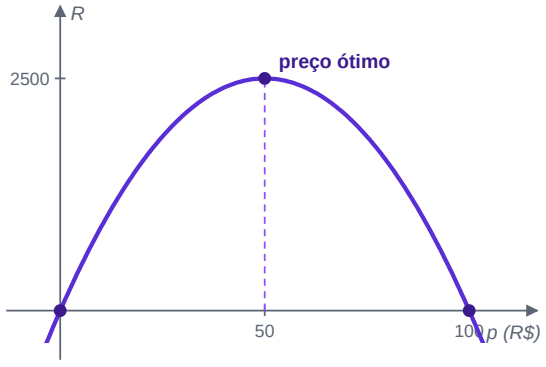
Se dois números têm soma fixa S, chamando um de x o outro é $S - x$ e o produto é $P(x) = x(S - x) = -x^2 + Sx$. Como $a = -1 < 0$, há máximo em $x_V = \frac{S}{2}$: **os dois números são iguais a $\frac{S}{2}$**.

Exemplo: soma 20 ⇒ o maior produto é $10 \cdot 10 = 100$. Para outros pares, o produto é menor: $9 \cdot 11 = 99$, $8 \cdot 12 = 96$, $5 \cdot 15 = 75$.

1.4 Receita com preço variável

Em muitas situações, quanto maior o preço, menor a quantidade vendida. Se a quantidade vendida é, por exemplo, $q = 100 - p$ (em que p é o preço), a receita é

$$R(p) = p \cdot q = p(100 - p) = -p^2 + 100p.$$



Com preço muito baixo, vende-se muito, mas a receita por unidade é pequena; com preço muito alto, quase nada se vende. A receita máxima ocorre em $p = 50$, com $R = 2500$.

DICA

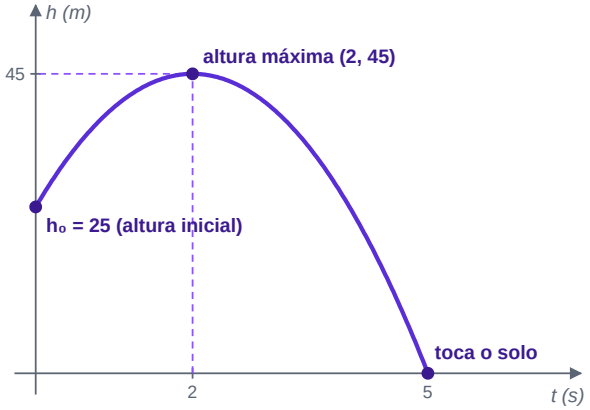
Enunciados como *"para cada R$ 1 de desconto, vendem-se 20 unidades a mais"* ou *"para cada pessoa a mais, o preço cai R$ 4"* pedem uma variável n que conte quantas vezes essa variação ocorre. Escreva o preço e a quantidade em função de n e multiplique.

1.5 Lançamento de objetos

Na Física, a altura de um objeto lançado verticalmente (desprezando a resistência do ar) é uma função do 2º grau do tempo:

$$h(t) = h_0 + v_0\,t - \frac{g}{2}t^2 \quad (\text{com } g \approx 10\ \text{m/s}^2:\ h(t) = h_0 + v_0 t - 5t^2)$$

Pergunta	O que calcular
De que altura foi lançado?	$h(0) = h_0$ (o termo independente)
Em que instante atinge a altura máxima?	$t_V = -\frac{b}{2a}$
Qual a altura máxima?	$h(t_V)$
Quando toca o solo?	raiz **positiva** de $h(t) = 0$
Quando está a uma altura H?	resolver $h(t) = H$ (pode haver dois instantes: um na subida e outro na descida)



$h(t) = -5t^2 + 20t + 25$. O vértice fornece o instante e o valor da altura máxima; a raiz positiva fornece o instante em que o objeto chega ao chão.

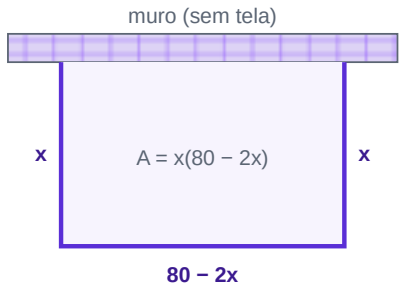
ERRO COMUM

Confundir o gráfico de $h(t)$ com a trajetória do objeto, que sobe e desce na mesma vertical. Além disso, tempo negativo não tem sentido físico: se $h(t) = 0$ fornece $t = -1$ e $t = 5$, a resposta é apenas $t = 5$.

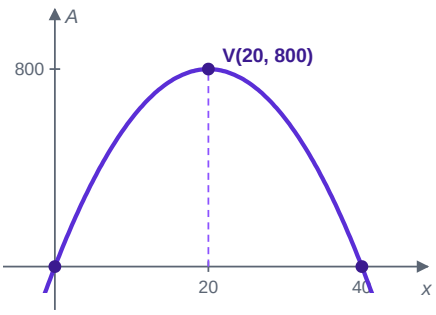
1.6 Área máxima com perímetro fixo

Cerca nos 4 lados. Com P metros de cerca, se um lado mede x, o outro mede $\frac{P}{2} - x$ e a área é $A(x) = x\left(\frac{P}{2} - x\right)$. Trata-se do problema do produto máximo com soma fixa (seção 1.3), com soma $\frac{P}{2}$; o máximo ocorre quando os lados são iguais: **o retângulo de maior área é o quadrado**.

Um lado é um muro. Se a cerca cobre apenas 3 lados, o resultado é outro. Com 80 m de tela, sejam x as medidas dos dois lados perpendiculares ao muro; o lado paralelo mede $80 - 2x$:



A tela cobre $x + x + (80 - 2x) = 80$ m.



$A(x) = -2x^2 + 80x$: máximo em $x = 20$, com lados 20 m e 40 m.

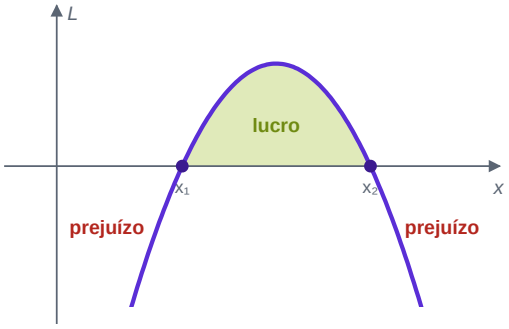
DICA

Com muro, o lado paralelo mede o **dobro** do lado perpendicular (40 = 2·20), e o retângulo não é um quadrado. Por isso,

monte a função a partir do desenho, em vez de supor que a resposta é sempre um quadrado.

1.7 Faixa de lucro positivo (estudo do sinal no contexto)

Perguntas como "para quais quantidades há lucro?" pedem o **estudo do sinal** de $L(x)$. Se L é uma parábola com $a < 0$ e raízes $x_1 < x_2$:



Com $a < 0$: positivo **entre** as raízes, negativo fora delas.

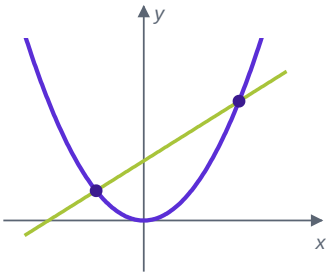
RESUMO

- Lucro positivo: $x_1 < x < x_2$.
- Sem prejuízo ($L \geq 0$): $x_1 \leq x \leq x_2$.
- Prejuízo: $x < x_1$ ou $x > x_2$.
- Pontos de equilíbrio: as raízes x_1 e x_2.

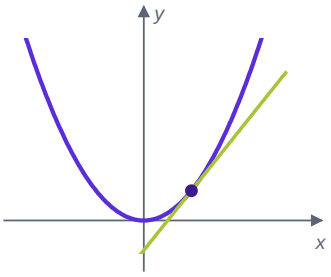
Também há prejuízo quando se vende muito porque, para vender grandes quantidades, o preço precisa cair tanto que a receita deixa de cobrir o custo.

1.8 Intersecção de reta com parábola

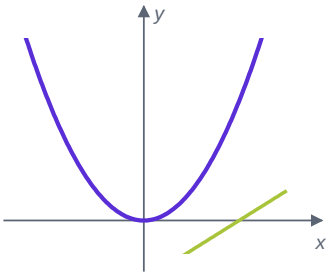
Para determinar onde dois gráficos se encontram (por exemplo, onde uma trajetória cruza uma rampa, ou quando duas grandezas ficam iguais), **igualamos as funções**, pois no ponto comum o mesmo x corresponde ao mesmo y. Igualar uma reta a uma parábola gera uma equação do 2º grau, cujo Δ indica quantos pontos comuns existem:



$\Delta > 0$: 2 pontos (secante)



$\Delta = 0$: 1 ponto (tangente)



$\Delta < 0$: nenhum ponto

1.9 Quadro-resumo

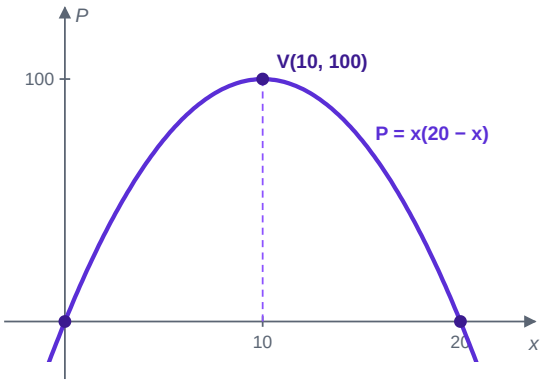
Pergunta do problema	Ferramenta
"Qual o maior / menor valor?"	$y_V = f(x_V)$ (confira o sinal de a)
"Para qual valor de x isso acontece?"	$x_V = -\frac{b}{2a}$
Dois números com soma fixa, produto máximo	os dois iguais a $\frac{S}{2}$
Retângulo de perímetro fixo, área máxima	quadrado (sem muro); monte $A(x)$ se houver muro
Receita com preço variável	$R =$ preço $\times$ quantidade, ambos em função de x
Projétil: altura inicial / toca o solo	$h(0)$ / raiz positiva de $h(t) = 0$
"Para quais x há lucro?"	estudo do sinal: entre as raízes (se $a < 0$)
Reta × parábola	igualar; $\Delta > 0$: 2 pontos, $\Delta = 0$: tangente, $\Delta < 0$: nenhum

2. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exercício resolvido 1. A soma de dois números reais é 20. Quais são esses números se o produto deles é o maior possível? Qual é esse produto?

Resolução:

1. **Variável:** seja x um dos números. Como a soma é 20, o outro é $20 - x$.
2. **Função:** o produto é $P(x) = x(20 - x) = -x^2 + 20x$. Como $a = -1 < 0$, a concavidade é voltada para baixo e existe **máximo**.
3. **Vértice:** $x_V = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{20}{2 \cdot (-1)} = 10$. O outro número é $20 - 10 = 10$.
4. **Valor máximo:** $P(10) = 10 \cdot 10 = 100$. (Outro caminho: as raízes são 0 e 20, e a abscissa do vértice é a média delas, $x = 10$.)



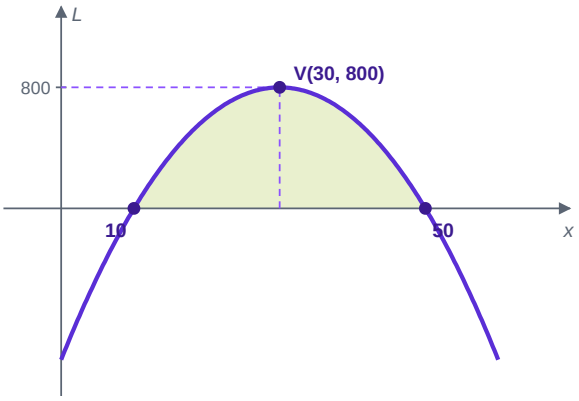
O produto é máximo quando os dois números são iguais.

Resposta: os números são 10 e 10; produto máximo 100.

Exercício resolvido 2. O lucro mensal de uma empresa, em reais, ao vender x peças é $L(x) = -2x^2 + 120x - 1000$. (a) Quantas peças devem ser vendidas para o lucro ser máximo? (b) Qual é esse lucro? (c) Para quais quantidades há lucro positivo?

Resolução:

1. $a = -2 < 0$ ⇒ concavidade para baixo ⇒ existe **máximo**, no vértice.
2. **(a)** $x_V = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{120}{2 \cdot (-2)} = 30$ peças.
3. **(b)** $L(30) = -2 \cdot 900 + 120 \cdot 30 - 1000 = -1800 + 3600 - 1000 = 800$ reais.
4. **(c)** Raízes: $-2x^2 + 120x - 1000 = 0$. Dividindo por -2: $x^2 - 60x + 500 = 0$ (soma 60, produto 500) ⇒ $x = 10$ ou $x = 50$.
5. Como $a < 0$, L é positivo **entre** as raízes: $10 < x < 50$. Verificação: $x_V = 30$ é a média de 10 e 50 ✓.



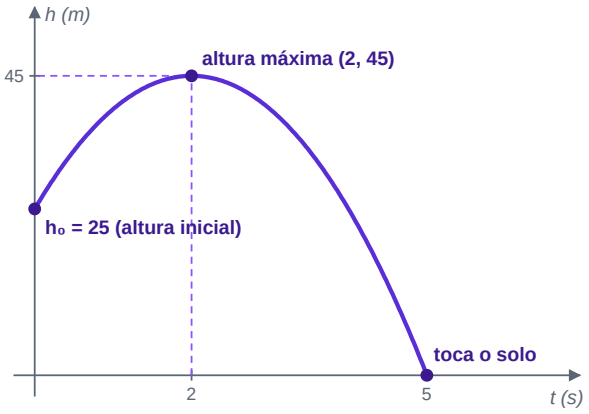
Lucro positivo (em verde) entre 10 e 50 unidades; máximo em $x = 30$.

Resposta: (a) 30 peças; (b) R$ 800,00; (c) entre 10 e 50 peças (exclusive).

Exercício resolvido 3. Uma bola é lançada para cima do alto de uma plataforma, e sua altura (em metros) após t segundos é $h(t) = -5t^2 + 20t + 25$. Determine: (a) a altura da plataforma; (b) a altura máxima e o instante em que ocorre; (c) o instante em que a bola toca o chão.

Resolução:

1. **(a)** No lançamento, $t = 0$: $h(0) = 25$ m (é o termo independente).
2. **(b)** $a = -5 < 0$ ⇒ há máximo. $t_V = -\dfrac{20}{2 \cdot (-5)} = 2$ s e $h(2) = -20 + 40 + 25 = 45$ m.
3. **(c)** No chão, $h(t) = 0$: $-5t^2 + 20t + 25 = 0$. Dividindo por -5: $t^2 - 4t - 5 = 0$ ⇒ $(t - 5)(t + 1) = 0$ ⇒ $t = 5$ ou $t = -1$.
4. Como o tempo não pode ser negativo, $t = 5$ s. (A subida dura 2 s e a descida, 3 s, pois a bola sobe 20 m e depois desce 45 m até o chão.)



Altura em função do tempo (o gráfico não representa a trajetória da bola).

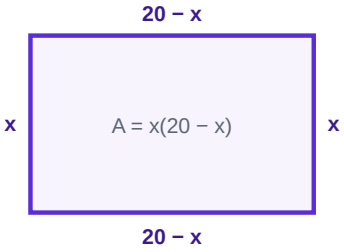
Resposta: (a) 25 m; (b) 45 m, em $t = 2$ s; (c) $t = 5$ s.

Exercício resolvido 4. Com 40 m de cerca, deseja-se cercar um terreno retangular de maior área possível. Quais devem ser as dimensões e qual é a área máxima?

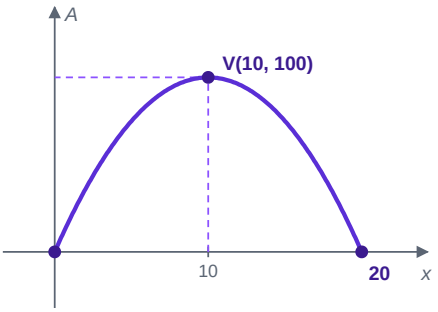
Resolução:

1. **Desenho e variável:** seja x a medida de um lado. Como o perímetro é 40, dois lados consecutivos somam 20; logo, o outro lado mede $20 - x$.
2. **Função área:** $A(x) = x(20 - x) = -x^2 + 20x$ ($a = -1 < 0$ ⇒ há máximo).
3. **Vértice:** $x_V = -\dfrac{20}{2 \cdot (-1)} = 10$ m. O outro lado é $20 - 10 = 10$ m.

4. **Área máxima:** $A(10) = 10 \cdot 10 = 100\ \text{m}^2$. O retângulo é um quadrado, como previsto na seção 1.6.



Lados x e $20 - x$.



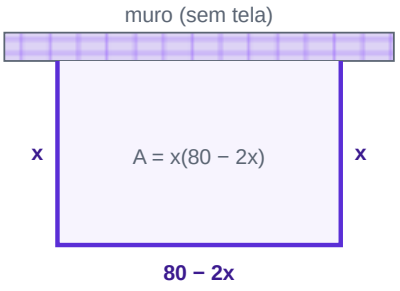
A área é máxima no vértice.

Resposta: quadrado de 10 m × 10 m, com área de 100 m².

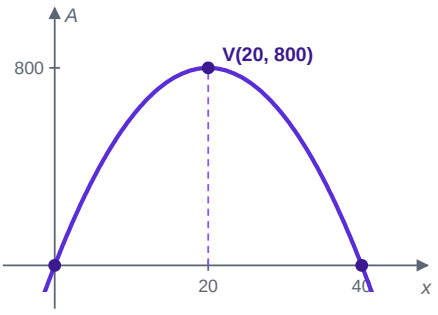
Exercício resolvido 5. Um sitiante tem 80 m de tela e quer cercar uma horta retangular encostada em um muro reto, que servirá como um dos lados (a tela cobre apenas os outros três). Quais são as dimensões da horta de maior área? Qual é essa área?

Resolução:

1. **Desenho:** os dois lados perpendiculares ao muro medem x; o lado paralelo ao muro mede o restante da tela: $80 - 2x$.
2. **Função área:** $A(x) = x(80 - 2x) = -2x^2 + 80x$. Como $a = -2 < 0$, há máximo.
3. **Vértice:** $x_V = -\dfrac{80}{2 \cdot (-2)} = 20$ m. Lado paralelo: $80 - 2 \cdot 20 = 40$ m.
4. **Área:** $A(20) = 20 \cdot 40 = 800\ \text{m}^2$.
5. **Conferência:** tela usada $20 + 20 + 40 = 80$ ✓. Para comparação, um quadrado de lado $26{,}7$ m (três lados de tela) teria área $\approx 26{,}7 \cdot 26{,}7 \approx 711$ m², menor que 800 m².



A tela cobre três lados.



$A(x) = -2x^2 + 80x$.

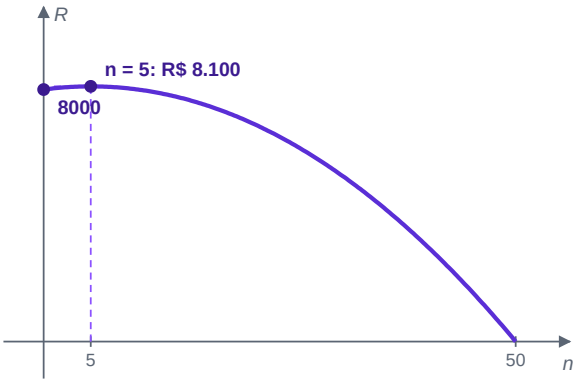
Resposta: 20 m (perpendicular ao muro) por 40 m (paralelo ao muro); área de 800 m².

Exercício resolvido 6. Uma agência organiza uma excursão para 40 pessoas, cobrando R$ 200,00 de cada uma. Para cada pessoa a mais que se inscrever, o preço por pessoa diminui R$ 4,00 (para todos). Quantas pessoas devem ir para que a receita da agência seja máxima? Qual é essa receita?

Resolução:

1. **Variável:** n = número de pessoas além das 40 iniciais.
2. **Grandezas em função de n:** pessoas $= 40 + n$; preço por pessoa $= 200 - 4n$.
3. **Receita** = pessoas × preço: $R(n) = (40 + n)(200 - 4n) = 8000 - 160n + 200n - 4n^2 = -4n^2 + 40n + 8000$.
4. **Vértice** ($a = -4 < 0 \Rightarrow$ máximo): $n_V = -\dfrac{40}{2 \cdot (-4)} = 5$.

5 **Interpretação:** $n = 5$ não é a resposta pedida. São $40 + 5 = 45$ pessoas pagando $200 - 20 = 180$ reais: $R = 45 \cdot 180 = 8100$ reais.



Receita em função do número n de pessoas extras.

Resposta: 45 pessoas; receita máxima de R$ 8.100,00.

Exercício resolvido 7. Uma fábrica percebeu que, para vender x unidades por mês, precisa cobrar $p = 100 - x$ reais por unidade. O custo mensal é $C(x) = 1200 + 20x$. (a) Escreva o lucro $L(x)$. (b) Quantas unidades dão lucro máximo, a que preço, e qual é esse lucro? (c) Para quais quantidades a fábrica tem lucro?

Resolução:

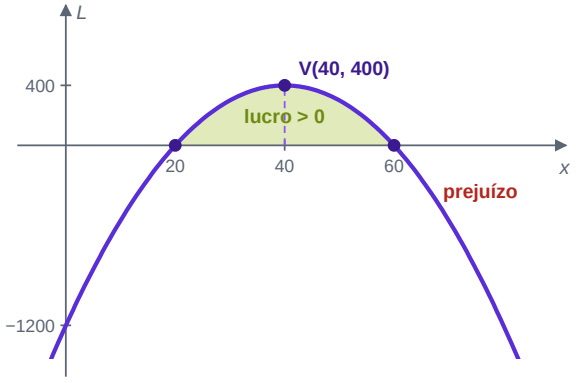
1 **Receita:** preço × quantidade $= (100 - x) \cdot x = 100x - x^2$.

2 **(a) Lucro:** $L(x) = R(x) - C(x) = 100x - x^2 - (1200 + 20x) = -x^2 + 80x - 1200$. (O sinal de menos se aplica a todo o custo.)

3 **(b)** $a = -1 < 0$ ⇒ máximo. $x_V = -\dfrac{80}{2 \cdot (-1)} = 40$ unidades; preço $p = 100 - 40 = 60$ reais; lucro $L(40) = -1600 + 3200 - 1200 = 400$ reais.

4 **(c) Raízes:** $-x^2 + 80x - 1200 = 0 \iff x^2 - 80x + 1200 = 0$. $\Delta = 6400 - 4800 = 1600$, $\sqrt{\Delta} = 40$ ⇒ $x = \dfrac{80 \pm 40}{2}$ ⇒ $x = 20$ ou $x = 60$.

5 **Sinal:** com $a < 0$, o lucro é positivo entre as raízes: $20 < x < 60$. Abaixo de 20 unidades, a receita não cobre o custo fixo; acima de 60, o preço fica baixo demais para cobrir os custos.



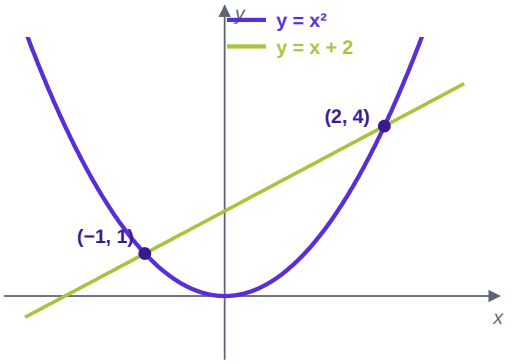
Lucro positivo (verde) entre 20 e 60 unidades; máximo de R$ 400 com 40 unidades.

Resposta: (a) $L(x) = -x^2 + 80x - 1200$; (b) 40 unidades, a R$ 60,00, lucro de R$ 400,00; (c) $20 < x < 60$.

Exercício resolvido 8 [nível concurso]. Num projeto, um arco tem a forma da parábola $y = x^2$ e um cabo esticado segue a reta $y = x + 2$ (medidas em metros). (a) Em que pontos o cabo toca o arco? (b) Entre esses pontos, qual dos dois está mais alto?

Resolução:

1. **Igualando** as funções (no ponto comum, os valores de y coincidem): $x^2 = x + 2$.
2. **Equação do 2º grau:** $x^2 - x - 2 = 0$. $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$ ⇒ dois pontos.
3. **Raízes:** $x = \dfrac{1 \pm 3}{2}$ ⇒ $x = 2$ ou $x = -1$.
4. **Ordenadas** (em qualquer das duas funções): $x = 2 \Rightarrow y = 4$; $x = -1 \Rightarrow y = 1$.
5. **(b)** Tomando um ponto entre -1 e 2, por exemplo $x = 0$: na reta, $y = 2$; na parábola, $y = 0$. Logo, o cabo está acima. Pelo estudo do sinal, $(x + 2) - x^2 = -(x^2 - x - 2)$ é positivo entre as raízes.



A reta corta a parábola em dois pontos; entre eles, a reta fica acima da parábola.

Resposta: (a) $(-1,\ 1)$ e $(2,\ 4)$; (b) o cabo (reta) está mais alto para $-1 < x < 2$.

3. EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01 A soma de dois números é 30. Determine os números cujo produto é máximo e o valor desse produto.

02 O lucro de uma empresa é $L(x) = -x^2 + 40x - 300$, em que x é o número de unidades vendidas.
a) Quantas unidades dão lucro máximo? Qual é esse lucro? b) Para quais quantidades o lucro é positivo?

03 Uma pedra é lançada do alto de um prédio e sua altura é $h(t) = -5t^2 + 30t + 35$ (m).
a) Qual a altura do prédio? b) Qual a altura máxima? c) Em que instante a pedra toca o solo?

04 Com 100 m de cerca, quer-se cercar (nos quatro lados) um terreno retangular de maior área possível. Determine as dimensões e a área máxima.

05 Ao preço de p reais, uma loja vende $q = 200 - 2p$ unidades de um produto. Determine o preço que maximiza a receita, quantas unidades são vendidas a esse preço e a receita máxima.

06 Determine os pontos de intersecção da reta $y = 2x + 3$ com a parábola $y = x^2$.

4. QUESTÕES DE CONCURSOS MILITARES

Questões oficiais de provas anteriores (EFOMM, EPCAR, EsPCEx, AFA e Escola Naval), selecionadas do banco de questões da Trilha Militares.

07 [EFOMM 2016]

De acordo com conceitos administrativos, o lucro de uma empresa é dado pela expressão matemática L = R – C, onde L é o lucro, C o custo da produção e R a receita do produto. Uma indústria produziu x peças e verificou que o custo de produção era dado pela função $C(x) = x^2 - 500x + 100$ e a receita representada por $R(x) = 2000x - x^2$. Com base nessas informações, determine o número de peças a serem produzidas para que o lucro seja máximo.

(A) 625
(B) 781150
(C) 1000
(D) 250
(E) 375

08 [EFOMM 2018]

Uma aluna do 3º ano da EFOMM, responsável pelas vendas dos produtos da SAMM (Sociedade Acadêmica da Marinha Mercante), percebeu que, com a venda de uma caneca a R$ 9,00, em média 300 pessoas compravam, quando colocadas as canecas à venda em um grande evento. Para cada redução de R$ 1,00 no preço da caneca, a venda aumentava em 100 unidades. Assim, o preço da caneca, para que a receita seja máxima, será de

(A) R$ 8,00.
(B) R$ 7,00.
(C) R$ 6,00.
(D) R$ 5,00.
(E) R$ 4,00.

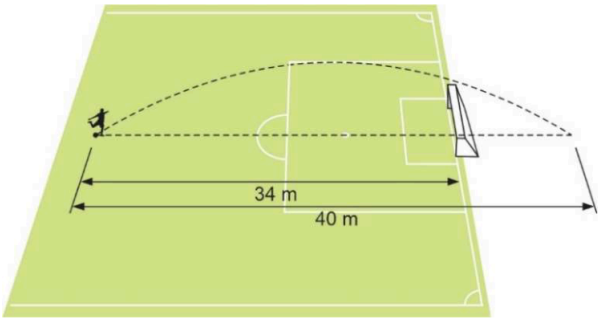
09 [EPCAR 2024]

Os administradores de uma indústria fizeram o levantamento dos valores recebidos com os lucros obtidos através da diferença entre as vendas e os custos de produção, ano a ano, ao longo de m décadas. O auge nos lucros aconteceu em t décadas e, com a crise no setor, foi necessário encerrar as atividades em k décadas, pois os lucros zeraram. As vendas V, em função de m, são dadas por $V(m) = -\frac{3}{8}m^2 + 3m + 60$ e os custos C, também em função de m, são dados por $C(m) = \frac{9}{8}m^2 - 9m + 30$, com V e C em milhares de dólares americanos. A diferença entre k e t, nessa ordem, em décadas, é igual a

(A) 4
(B) 6
(C) 8
(D) 10

10 [EPCAR 2027]

Um jogador de futebol chuta a bola que se encontrava parada no gramado (solo) em direção ao gol adversário a uma distância de 34 m. A bola descreve uma trajetória parabólica que, se completasse uma curvatura, tocaria novamente no solo (gramado) a uma distância de 40 m da sua posição inicial de chute. Sabendo que a altura máxima atingida pela bola foi de 5 m e que a altura do gol é de 2,44 m (em sua parte interna) e que a espessura do travessão é de 12 cm, então a bola:



(A) entrou diretamente no gol adversário.
(B) bateu (colidiu) no travessão.
(C) passou por cima do travessão.
(D) atingiu sua altura máxima a 15 m do local do chute.

11 [EsPCEx 2018]

A equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2 - 6x + 1$, no ponto $(4, -7)$, é igual a

(A) $y = -2x + 1$.
(B) $y = 3x - 19$.
(C) $y = x - 11$.
(D) $y = -3x + 5$.
(E) $y = 2x - 15$.

12 [Escola Naval 2019]

Uma loja de bombons está com o seguinte cartaz de promoção: "compre x bombons e ganhe $x\%$ de desconto". A promoção é válida para compras de até 60 bombons, caso em que é concedido o desconto máximo de 60%. Maria, Flávio, Gisele, Felipe, Evandro e Diego compram 53, 40, 33, 47, 38 e 57 bombons, respectivamente. Nessas condições, assinale a opção que apresenta o nome das pessoas que poderiam ter comprado mais bombons e pago a mesma quantia inicial.

(A) Diego e Maria.
(B) Gisele e Evandro.
(C) Maria e Gisele.
(D) Diego e Evandro.
(E) Felipe e Flávio.

5. GABARITO COMENTADO

Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.
07	A	08	C	09	B	10	B
11	E	12	E				

▼ 01 a 06 – Fixação

01. Números x e $30 - x$; produto $P(x) = -x^2 + 30x$; $x_V = 15$ ⇒ os números são 15 e 15 e o produto máximo é 225.

02. a) $a = -1 < 0$ ⇒ máximo. $x_V = -\frac{40}{-2} = 20$ unidades; $L(20) = -400 + 800 - 300 =$ R$ 100. b) $-x^2 + 40x - 300 = 0 \iff x^2 - 40x + 300 = 0$ (soma 40, produto 300) ⇒ 10 e 30. Lucro positivo entre as raízes: $10 < x < 30$.

03. a) $h(0) = 35$ m. b) $t_V = -\frac{30}{-10} = 3$ s; $h(3) = -45 + 90 + 35 = 80$ m. c) $-5t^2 + 30t + 35 = 0 \iff t^2 - 6t - 7 = 0$ ⇒ $t = 7$ ou $t = -1$; vale $t = 7$ s.

04. Lados x e $50 - x$; $A(x) = -x^2 + 50x$; $x_V = 25$ ⇒ quadrado de 25 m × 25 m, área $625\ \text{m}^2$.

05. $R(p) = p(200 - 2p) = -2p^2 + 200p$; $p_V = -\frac{200}{-4} = 50$ reais; vende $q = 200 - 100 = 100$ unidades; $R = 50 \cdot 100 =$ R$ 5.000,00.

06. Igualando: $x^2 = 2x + 3$ ⇒ $x^2 - 2x - 3 = 0$ ⇒ $x = 3$ ou $x = -1$. Substituindo em $y = x^2$: $(3, 9)$ e $(-1, 1)$.

▼ 07 a 12 – Concursos militares

07 (A) · EFOMM 2016.

$$L(x) = 2000x - x^2 - \left(x^2 - 500x + 100\right) = -2x^2 + 2500x - 100$$

$$x_v = -\frac{2500}{2 \cdot (-2)} = 625$$

08 (C) · EFOMM 2018.

Com d reais de desconto:

$$R(d) = (9 - d)(300 + 100d) = 100(9 - d)(3 + d)$$

As raízes são $d = 9$ e $d = -3$; o máximo fica no meio, $d = 3$. Preço: R$ 6,00.

09 (B) · EPCAR 2024.

$$L(m) = V(m) - C(m) = -\frac{3}{2}m^2 + 12m + 30$$

O auge é no vértice: $t = \frac{-12}{2 \cdot (-3/2)} = 4$.

O lucro zera quando $m^2 - 8m - 20 = 0$, com $m = 10$ (a raiz -2 não serve): $k = 10$. $k - t = 6$.

10 (B) · EPCAR 2027.

Com raízes em 0 e 40 m, o vértice está em $x = 20$ m (o que já descarta a alternativa D): $y = ax(x - 40)$ e $5 = a \cdot 20 \cdot (-20)$, $a = -\frac{1}{80}$.

$$y(34) = -\frac{1}{80} \cdot 34 \cdot (-6) = \frac{204}{80} = 2{,}55\ \text{m}$$

O travessão ocupa de 2,44 m a $2{,}44 + 0{,}12 = 2{,}56$ m de altura. Como $2{,}44 < 2{,}55 < 2{,}56$, a bola bate no travessão.

11 (E) · EsPCEx 2018.

A reta por $(4, -7)$ com coeficiente angular m é $y = m(x - 4) - 7$. Ela é tangente quando a interseção com a parábola tem raiz dupla:

$$x^2 - 6x + 1 = mx - 4m - 7 \iff x^2 - (6 + m)x + (8 + 4m) = 0, \quad \Delta = (6 + m)^2 - 4(8 + 4m) = (m - 2)^2 = 0 \implies m = 2$$

$$y + 7 = 2(x - 4) \;\Rightarrow\; y = 2x - 15$$

12 (E) · Escola Naval 2019.

Com preço unitário c, quem compra $x \leq 60$ bombons paga

$$V(x) = cx\left(1 - \frac{x}{100}\right)$$

A parábola é simétrica em torno de $x = 50$: $V(x) = V(100 - x)$. Quem comprou $x < 50$ pagaria o mesmo levando $100 - x$ bombons, desde que $100 - x \leq 60$, isto é, $x \geq 40$.

Flávio (40 → 60) e Felipe (47 → 53) se encaixam; Gisele (33) e Evandro (38) precisariam de 67 e 62, acima do limite; Maria e Diego já passaram de 50.