PROF. LUIS TEIXEIRA
Física | Matemática

FICHA DE MATEMÁTICA

Função do 2º grau

Estudo do sinal e inequações

Aluno(a): _____ | **Data:** ___/___/___ | **Prof.:** Luis Teixeira

1. TEORIA

1.1 O estudo do sinal de uma função

> **DEFINIÇÃO**
>
> **Estudar o sinal** de uma função f é determinar para quais valores de x ela é **positiva** ($f(x) > 0$), **nula** ($f(x) = 0$) ou **negativa** ($f(x) < 0$).

No gráfico, $f(x)$ é a ordenada do ponto da curva que tem abscissa x. Assim:

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow$ o gráfico está **acima** do eixo x;
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow$ o gráfico encontra o eixo x (esses valores de x são as **raízes**);
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow$ o gráfico está **abaixo** do eixo x.

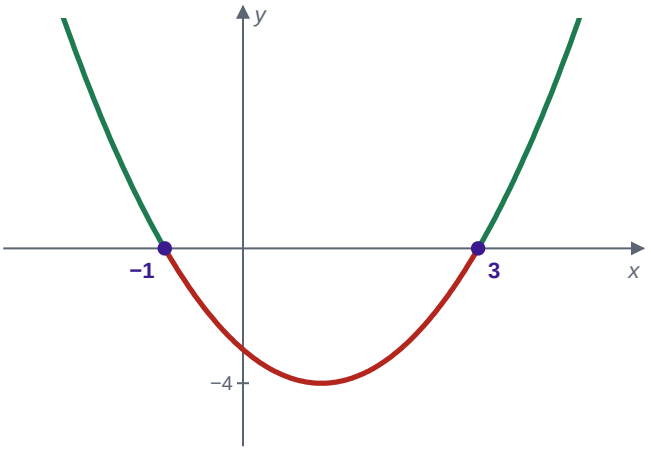


Gráfico de $f(x) = x^2 - 2x - 3$: em **verde**, a parte acima do eixo x ($f(x) > 0$); em **vermelho**, a parte abaixo ($f(x) < 0$).

Resumimos essa informação em uma **reta de sinais**: marcamos as raízes na reta real e escrevemos o sinal de f em cada trecho.



Reta de sinais de $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

OBSERVAÇÃO

O gráfico de uma função do 2º grau é uma curva contínua (sem saltos). Para passar de um lado para o outro do eixo x, a curva precisa cruzá-lo, o que só ocorre em uma raiz. Por isso, **entre duas raízes consecutivas o sinal não muda**, e é suficiente determinar o sinal em cada trecho.

1.2 Roteiro para estudar o sinal de $f(x) = ax^2 + bx + c$

1. **Calcule** $\Delta = b^2 - 4ac$ e as raízes (se existirem).
2. **Observe o sinal de** a: se $a > 0$, a concavidade é voltada para cima; se $a < 0$, para baixo.
3. **Esboce** a parábola apenas com essas duas informações (o esboço não precisa de escala).
4. **Leia** no esboço onde ela está acima, sobre ou abaixo do eixo x e monte a reta de sinais.

1.3 Caso $\Delta > 0$: duas raízes reais $x_1 < x_2$

A parábola corta o eixo x em dois pontos. Fora do intervalo entre as raízes, os ramos da parábola ficam do lado para o qual a concavidade está voltada; entre as raízes, a curva fica do lado oposto.

REGRA PRÁTICA

Fora das raízes: f tem o **mesmo sinal de** a. **Entre** as raízes: f tem o sinal **contrário** ao de a.

Justificativa. Com duas raízes, podemos escrever $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (forma fatorada). Os sinais dos fatores são:

	$x < x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x > x_2$
$x - x_1$	−	+	+
$x - x_2$	−	−	+
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	−	+

O produto $(x - x_1)(x - x_2)$ é **positivo fora** e **negativo entre** as raízes. Multiplicando por a, obtém-se o sinal de a fora das raízes e o sinal contrário entre elas.

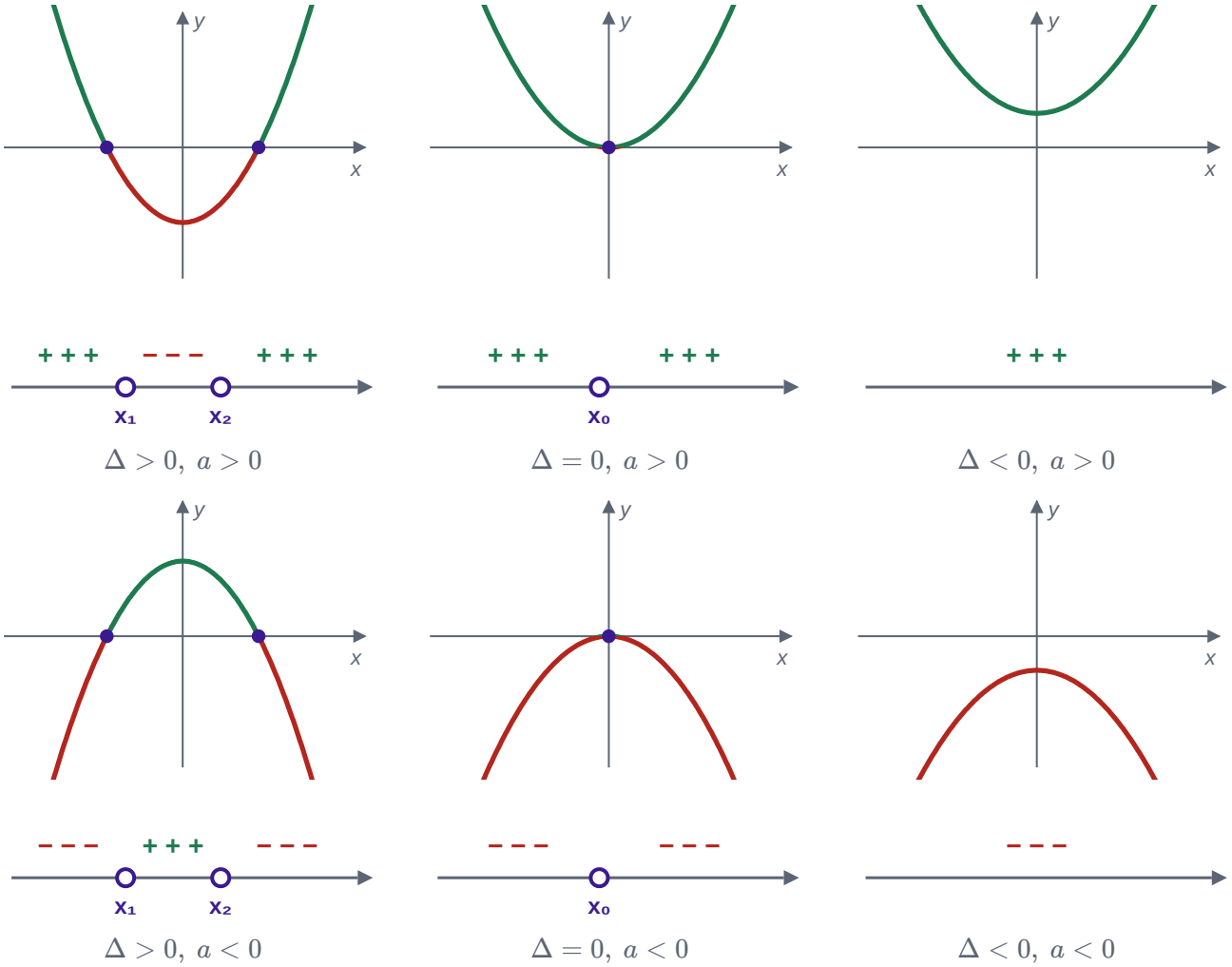
1.4 Caso $\Delta = 0$: uma raiz dupla x_0

Nesse caso, $f(x) = a(x - x_0)^2$. Como $(x - x_0)^2 \geq 0$ para todo x, o sinal de f é o **sinal de** a **para todo** $x \neq x_0$, e $f(x_0) = 0$. A parábola apenas **tangencia** o eixo x.

1.5 Caso $\Delta < 0$: nenhuma raiz real

A parábola não toca o eixo x: fica inteiramente de um mesmo lado do eixo. Logo, f **tem o sinal de** a **para todo** x **real**.

Justificativa: completando quadrados, $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$. Se $\Delta < 0$, o colchete é a soma de um quadrado (≥ 0) com um número positivo, portanto é sempre positivo; o sinal final é o de a.



Os seis casos possíveis. Os pontos marcados são as raízes; em verde $f > 0$, em vermelho $f < 0$.

1.6 Inequações do 2º grau

> **DEFINIÇÃO**
>
> Inequação do 2º grau é uma desigualdade que pode ser escrita como $ax^2 + bx + c > 0,\ \geq 0,\ < 0$ ou ≤ 0 (com $a \neq 0$). Resolvê-la é encontrar todos os valores de x que tornam a desigualdade verdadeira; em geral, a resposta é um **intervalo** (ou uma união de intervalos), e não um ou dois números.

Método. Resolver uma inequação do 2º grau consiste em estudar o sinal da expressão e escolher os trechos pedidos.

1. Passe todos os termos para um mesmo membro, deixando 0 no outro.
2. Estude o sinal da expressão (roteiro 1.2).
3. Escolha os trechos com o sinal pedido. Com $\geq$ ou $\leq$, as raízes pertencem à solução (bolinha fechada •); com $>$ ou $<$, não pertencem (bolinha aberta ◦).
4. Escreva o conjunto solução S.

Exemplo com $f(x) = x^2 - 5x + 6$ (raízes 2 e 3, $a > 0$):

Inequação	Trechos escolhidos	Solução
$x^2 - 5x + 6 > 0$	fora, sem as raízes	$x < 2$ ou $x > 3$
$x^2 - 5x + 6 \geq 0$	fora, com as raízes	$x \leq 2$ ou $x \geq 3$
$x^2 - 5x + 6 < 0$	entre, sem as raízes	$2 < x < 3$
$x^2 - 5x + 6 \leq 0$	entre, com as raízes	$2 \leq x \leq 3$

1.7 Como escrever a solução: intervalos

Desigualdade	Intervalo	Na reta
$2 < x < 3$	$]2, 3[$ ou $(2, 3)$	∘——∘
$2 \leq x \leq 3$	$[2, 3]$	•——•
$x < 2$ ou $x > 3$	$]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$	——∘ ∘——
todo real	$\mathbb{R}$	————
nenhum valor	$\varnothing$	(vazio)

No extremo $\pm\infty$, o intervalo é sempre aberto, pois $\pm\infty$ não é um número real e não pertence ao conjunto.

1.8 Inequações produto e quociente

São inequações como $(x - 2)(x^2 - 9) \geq 0$ ou $\dfrac{x - 4}{x + 2} \leq 0$. Elas são resolvidas com a regra de sinais da multiplicação e da divisão:

1. Estude o sinal de **cada fator** separadamente.
2. Monte o **quadro de sinais**: uma linha por fator, colunas para cada trecho determinado por todas as raízes.
3. Na última linha, aplique a regra: $(+)(+) = +$, $(+)(-) = -$, $(-)(-) = +$ (a mesma regra vale para a divisão).
4. Escolha os trechos pedidos. **A raiz do denominador nunca pertence à solução** (não existe divisão por zero): a bolinha é sempre aberta.

ERROS COMUNS

- **Concluir de $x^2 > 4$ que $x > 2$.** O valor $x = -3$ também satisfaz a inequação ($9 > 4$). O correto é $x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x < -2$ ou $x > 2$.
- **Dividir os dois membros por x** em $x^2 > 3x$. Não se sabe se x é positivo ou negativo (e o sentido da desigualdade dependeria disso); além disso, perde-se $x = 0$. Passe todos os termos para um membro e fatore.
- **Multiplicar por um número negativo sem inverter** o sentido da desigualdade. Ex.: $-x^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0$.
- **Responder apenas com as raízes.** A solução de uma inequação é um conjunto de valores, e não apenas $x = 2$ e $x = 3$.
- **Multiplicar os dois membros pelo denominador** em $\frac{x-4}{x+2} \leq 0$. Isso só é válido quando se conhece o sinal do denominador. Use o quadro de sinais.

1.9 Quadro-resumo

Δ	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$	$+$ fora, $-$ entre as raízes	$-$ fora, $+$ entre as raízes
$\Delta = 0$	$+$ para $x \neq x_0$; zero em x_0	$-$ para $x \neq x_0$; zero em x_0
$\Delta < 0$	$+$ para todo x	$-$ para todo x

DICA

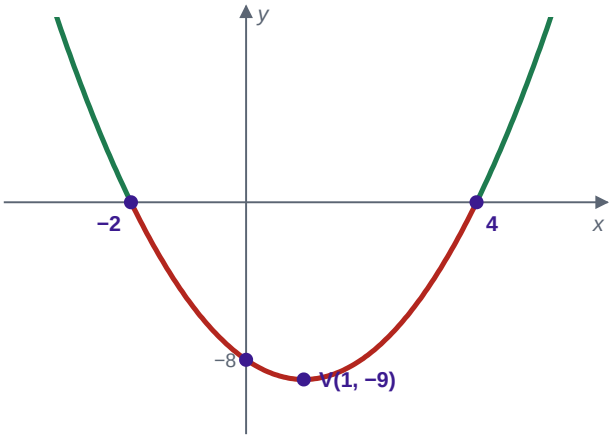
$ax^2 + bx + c > 0$ **para todo** x **real** $\Leftrightarrow a > 0$ e $\Delta < 0$. $ax^2 + bx + c < 0$ **para todo** x **real** $\Leftrightarrow a < 0$ e $\Delta < 0$.

2. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exercício resolvido 1. Estude o sinal de $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

Resolução:

1. **Raízes.** $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$. Então $x = \dfrac{2 \pm 6}{2}$, isto é, $x_1 = -2$ e $x_2 = 4$.
2. **Concavidade.** $a = 1 > 0 \Rightarrow$ para cima.
3. **Esboço.** Parábola com concavidade para cima que corta o eixo em -2 e 4 (vértice $V(1, -9)$).
4. **Leitura.** Fora das raízes a curva está acima do eixo; entre elas, abaixo.



Esboço de $f(x) = x^2 - 2x - 8$.



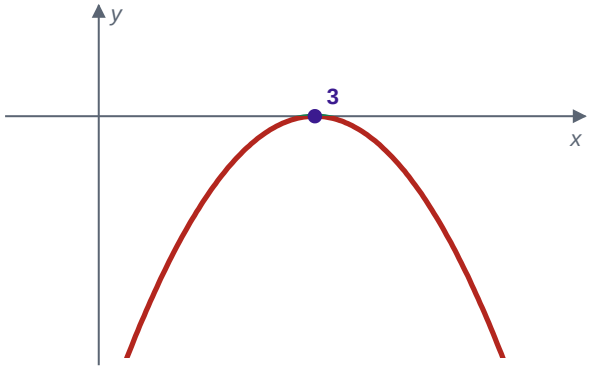
Sinal de $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

Resposta: $f(x) > 0$ **para** $x < -2$ **ou** $x > 4$; $f(x) = 0$ **para** $x = -2$ **ou** $x = 4$; $f(x) < 0$ **para** $-2 < x < 4$.

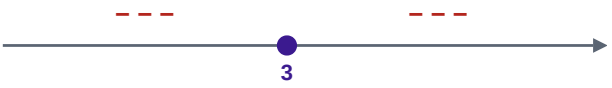
Exercício resolvido 2. Resolva as inequações (a) $-x^2 + 6x - 9 \geq 0$ e (b) $-x^2 + 6x - 9 < 0$.

Resolução:

1. **Raízes.** $\Delta = 36 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9) = 36 - 36 = 0$ ⇒ raiz dupla $x_0 = \dfrac{-6}{2 \cdot (-1)} = 3$. De fato, $-x^2 + 6x - 9 = -(x - 3)^2$.
2. **Concavidade.** $a = -1 < 0$ ⇒ para baixo. A parábola tangencia o eixo em $x = 3$ e fica abaixo dele para os demais valores de x.
3. **(a)** Queremos ≥ 0: a curva nunca fica acima do eixo e só se anula em $x = 3$. Logo, $S = \{3\}$.
4. **(b)** Queremos < 0: a desigualdade vale para todo x, exceto $x = 3$ (nesse ponto a função vale 0, que não é negativo).



Esboço de $f(x) = -x^2 + 6x - 9$: toca o eixo apenas em $x = 3$ e, nos demais pontos, fica abaixo dele.



Para $f(x) \geq 0$, só serve o ponto $x = 3$ (bolinha fechada).

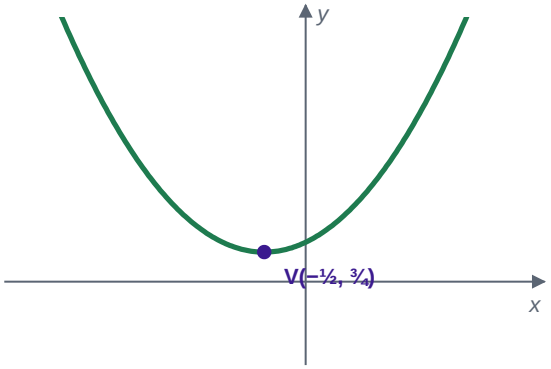
Resposta: (a) $S = \{3\}$; **(b)** $S = \mathbb{R} - \{3\}$.

Exercício resolvido 3. Resolva (a) $x^2 + x + 1 > 0$ e (b) $x^2 + x + 1 < 0$.

Resolução:

1. **Raízes.** $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ ⇒ não há raízes reais: a parábola não toca o eixo x.

2. **Concavidade.** $a = 1 > 0$ ⇒ para cima. Como não toca o eixo, fica inteiramente acima dele.
3. Logo, $x^2 + x + 1$ é positivo para qualquer x real e nunca é negativo.



$f(x) = x^2 + x + 1$ fica sempre acima do eixo x.

Resposta: (a) $S = \mathbb{R}$; (b) $S = \varnothing$.

Exercício resolvido 4. Resolva (a) $x^2 \leq 9$ e (b) $x^2 > 3x$.

Resolução:

(a)

1. **Todos os termos em um membro:** $x^2 - 9 \leq 0$. (Atenção: a solução *não* é $x \leq 3$.)
2. **Raízes:** $x^2 = 9 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 3$. $a = 1 > 0$.
3. **Sinal:** negativo entre as raízes. Como a desigualdade é $\leq$, as raízes pertencem à solução.



Sinal de $x^2 - 9$: queremos ≤ 0: trecho entre as raízes, com bolinhas fechadas.

(b)

1. **Não divida por x.** Passe todos os termos para um membro: $x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x - 3) > 0$.
2. **Raízes:** $x = 0$ e $x = 3$; $a = 1 > 0$ ⇒ positivo fora das raízes.
3. Como a desigualdade é estrita, as raízes não pertencem à solução.



Sinal de $x^2 - 3x$: queremos > 0: trechos externos, com bolinhas abertas.

Resposta: (a) $S = [-3, 3]$; (b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 3\}$.

Exercício resolvido 5 (inequação produto). Resolva $(x - 2)(x^2 - 9) \geq 0$.

Resolução:

1. **Fator $f = x - 2$** (1º grau, $a > 0$): raiz 2; negativo antes de 2, positivo depois.

2. **Fator** $g = x^2 - 9$ (2º grau, $a > 0$): raízes -3 e 3; positivo fora, negativo entre.
3. **Quadro de sinais** com todas as raízes em ordem: $-3,\ 2,\ 3$.

	$x < -3$	$-3 < x < 2$	$2 < x < 3$	$x > 3$
$x - 2$	−	−	+	+
$x^2 - 9$	+	−	−	+
$(x-2)(x^2-9)$	−	+	−	+

4. **Escolha:** queremos ≥ 0, isto é, as colunas com sinal $+$, incluindo as raízes (não há denominador, então todas as raízes pertencem à solução).

Resposta: $S = [-3,\ 2] \cup [3,\ +\infty[$.

Exercício resolvido 6 (inequação quociente). Resolva $\dfrac{x^2 - 1}{x - 2} < 0$.

Resolução:

1. **Condição de existência:** $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$.
2. **Numerador** $x^2 - 1$: raízes -1 e 1, $a > 0 \Rightarrow +$ fora, $-$ entre.
3. **Denominador** $x - 2$: raiz 2; $-$ antes, $+$ depois.
4. **Quadro de sinais** com $-1,\ 1,\ 2$:

	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < 2$	$x > 2$
$x^2 - 1$	+	−	+	+
$x - 2$	−	−	−	+
$\dfrac{x^2-1}{x-2}$	−	+	−	+

5. **Escolha:** queremos < 0, isto é, as colunas com sinal $-$, sem as raízes (a desigualdade é estrita e, além disso, 2 anula o denominador).

Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } 1 < x < 2\}$.

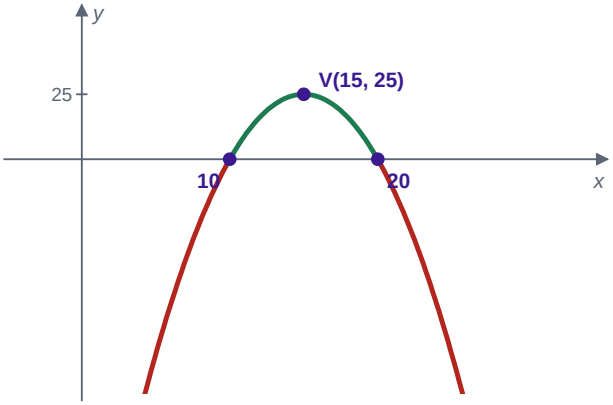
Exercício resolvido 7 (problema). O lucro mensal de uma fábrica, em milhares de reais, é $L(x) = -x^2 + 30x - 200$, em que x é a quantidade produzida (em milhares de unidades). Para quais quantidades a fábrica tem **lucro positivo**? Qual o lucro máximo?

Resolução:

1. **Condição:** lucro positivo significa $L(x) > 0$, isto é, $-x^2 + 30x - 200 > 0$.
2. **Raízes:** multiplicando $L(x) = 0$ por -1: $x^2 - 30x + 200 = 0$, $\Delta = 900 - 800 = 100$, $x = \dfrac{30 \pm 10}{2} \Rightarrow x = 10$ ou $x = 20$.
3. **Sinal:** $a = -1 < 0 \Rightarrow$ positivo **entre** as raízes.

4. **Máximo:** no vértice, $x_V = \dfrac{10+20}{2} = 15$ e $L(15) = -225 + 450 - 200 = 25$.

5. **Interpretação:** abaixo de 10 mil unidades, a receita não cobre os custos fixos; acima de 20 mil, os custos crescem mais que a receita.



Lucro $L(x)$: positivo entre 10 e 20 mil unidades; máximo de 25 em $x = 15$.



Sinal de $L(x) = -x^2 + 30x - 200$.

Resposta: lucro positivo para $10 < x < 20$ (entre 10 e 20 mil unidades); lucro máximo de 25 mil reais com 15 mil unidades.

Exercício resolvido 8 (nível concurso). (a) Determine os valores reais de x para os quais $\sqrt{x^2 - 5x + 4}$ é um número real. (b) Determine m para que $x^2 + mx + 4 > 0$ para todo x real.

Resolução:

(a)

1. Como a raiz quadrada de número negativo não é real, é preciso ter $x^2 - 5x + 4 \geq 0$.
2. Raízes: 1 e 4 (soma 5, produto 4). $a > 0 \Rightarrow$ positivo fora das raízes; com $\geq$, as raízes pertencem à solução.



Sinal de $x^2 - 5x + 4$: queremos ≥ 0.

(b)

1. Para que a expressão seja positiva para todo x, a parábola precisa ficar inteiramente acima do eixo: concavidade para cima ($a = 1 > 0$ ✓) e **nenhuma raiz real** ($\Delta < 0$).
2. $\Delta = m^2 - 16 < 0 \Rightarrow m^2 < 16 \Rightarrow -4 < m < 4$ (inequação do 2º grau em m: raízes ± 4, negativo entre).
3. **Observação:** não se pode aceitar $\Delta = 0$, pois nesse caso a parábola tangencia o eixo e a expressão vale 0 no ponto de tangência, o que contraria a condição > 0.

Resposta: (a) $x \leq 1$ ou $x \geq 4$; (b) $-4 < m < 4$.

3. EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01 Estude o sinal das funções:
a) $f(x) = x^2 - 7x + 10$ b) $g(x) = -x^2 + x + 12$ c) $h(x) = x^2 - 6x + 9$ d) $p(x) = -2x^2 + x - 3$

02 Resolva em $\mathbb{R}$:
a) $x^2 - 4x < 0$ b) $x^2 - 16 \geq 0$ c) $-x^2 + 2x + 3 > 0$ d) $x^2 + 4x + 4 \leq 0$

03 Resolva a inequação $x^2 \geq 2x + 15$.

04 Resolva a inequação produto $(x - 1)(x + 3)(x - 4) \leq 0$.

05 Resolva a inequação quociente $\dfrac{x - 4}{x + 2} \leq 0$.

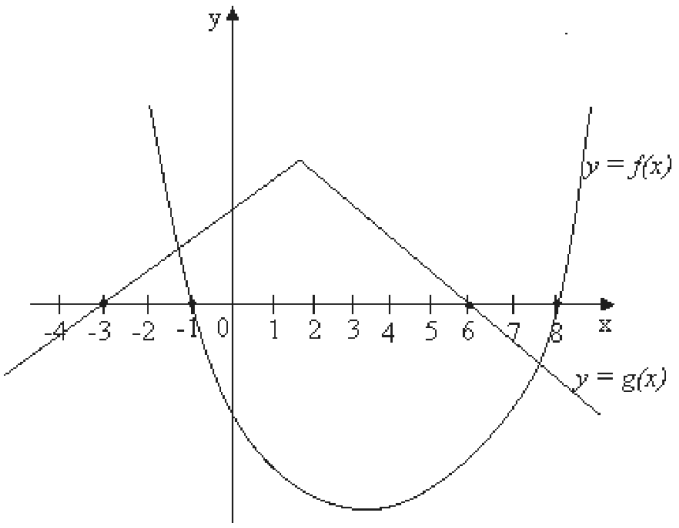
06 Determine os valores de k para que $x^2 - 6x + k > 0$ para todo x real.

4. QUESTÕES DE CONCURSOS MILITARES

Questões oficiais de provas anteriores (EFOMM, EPCAR, EsPCEx, AFA e Escola Naval), selecionadas do banco de questões da Trilha Militares.

07 **[EsPCEx 2017]**

Na figura estão representados os gráficos das funções reais f (quadrática) e g (modular) definidas em $\mathbb{R}$. Todas as raízes das funções f e g também estão representadas na figura. Sendo $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, assinale a alternativa que apresenta os intervalos onde h assume valores negativos.



(A) $]-3, -1] \cup]6, 8]$
(B) $]-\infty, -3[\cup]-1, 6[\cup]8, +\infty[$
(C) $]-\infty, 2[\cup [4, +\infty[$
(D) $]-\infty, -3[\cup [-1, 2[\cup [7, +\infty[$
(E) $]-3, -1] \cup [2, 4[\cup]6, 8]$

08 [EsPCEx 2020]

Sejam $f(x) = 4x^2 - 12x + 5$ e $g(x) = x + 2$ funções reais. O menor inteiro para o qual $f(g(x)) < 0$ é

(A) -2.
(B) -1.
(C) 0.
(D) 1.
(E) 2.

09 [EsPCEx 2025]

Os possíveis valores reais de x que validam a desigualdade $\frac{x}{x^3 - x^2 + x - 1} \geq 0$ são tais que $x \leq p$ ou $x > q$. O valor de $p + q$ é igual a:

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

10 [EsPCEx 2024]

A quantidade de números inteiros que satisfazem a inequação $\frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 4x} \leq 0$ é igual a:

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

5. GABARITO COMENTADO

Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.
07	B	08	B	09	B	10	C

▼ 01 a 06 – Fixação

01. a) Raízes 2 e 5, $a>0$: $f>0$ para $x<2$ ou $x>5$; $f<0$ para $2<x<5$; $f=0$ em 2 e 5.
b) Raízes -3 e 4 ($x^2-x-12=0$), $a<0$: $g>0$ para $-3<x<4$; $g<0$ para $x<-3$ ou $x>4$.
c) $\Delta=0$, raiz dupla 3, $a>0$: $h>0$ para todo $x\neq 3$ e $h(3)=0$.
d) $\Delta=1-24=-23<0$ e $a<0$: $p(x)<0$ para todo x real.

02. a) $x(x-4)<0$: raízes 0 e 4, negativo entre $\Rightarrow 0<x<4$. b) Raízes ± 4, positivo fora com as raízes $\Rightarrow x\leq -4$ ou $x\geq 4$. c) Raízes -1 e 3, $a<0\Rightarrow$ positivo entre $\Rightarrow -1<x<3$. d) $(x+2)^2\leq 0$ só é satisfeita quando $(x+2)^2=0\Rightarrow S=\{-2\}$.

03. $x^2-2x-15\geq 0$; raízes -3 e 5; $a>0\Rightarrow x\leq -3$ ou $x\geq 5$.

04. Raízes $-3,\ 1,\ 4$. Sinais (da esquerda para a direita): $x+3$: $-,+,+,+$; $x-1$: $-,-,+,+$; $x-4$: $-,-,-,+$. Produto: $-,+,-,+$. Com ≤ 0: $S=]-\infty,-3]\cup[1,4]$.

05. Numerador $x-4$ (raiz 4), denominador $x+2$ (raiz -2, excluída). Quociente: $+$ para $x<-2$, $-$ para $-2<x<4$, $+$ para $x>4$. Com ≤ 0: $S=]-2,\ 4]$.

06. $a=1>0$; é preciso ter $\Delta<0$: $36-4k<0\Rightarrow k>9$.

▼ 07 a 10 – Concursos militares

07 (B) · EsPCEx 2017.

Pelo gráfico, f tem raízes -1 e 8 e é negativa entre elas; g tem raízes -3 e 6 e é positiva entre elas.

h é negativa quando f e g têm sinais opostos (e $g\neq 0$):

$x<-3$: $f>0$, $g<0$ ✓. $-3<x<-1$: ambas positivas. $-1<x<6$: $f<0$, $g>0$ ✓. $6<x<8$: ambas negativas. $x>8$: $f>0$, $g<0$ ✓.

Em $x=-1$ e $x=8$, h vale 0 (não é negativa). Resposta: $]-\infty,-3[\cup]-1,6[\cup]8,+\infty[$.

08 (B) · EsPCEx 2020.

Com $u=x+2$: $4u^2-12u+5<0$, raízes $u=\frac{1}{2}$ e $u=\frac{5}{2}$:

$$\frac{1}{2}<x+2<\frac{5}{2}\ \Leftrightarrow\ -\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2}$$

O menor inteiro do intervalo é -1.

09 (B) · EsPCEx 2025.

$$x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)$$

Como $x^2+1>0$, basta $\frac{x}{x-1}\geq 0$: $x\leq 0$ ou $x>1$. Logo $p=0$, $q=1$ e $p+q=1$.

10 (C) · EsPCEx 2024.

Existência: $x\geq 1$ e $x\neq 0,4$. O numerador é ≥ 0, então a fração é ≤ 0 quando o numerador é zero ($x=1$, com denominador -3) ou quando o denominador é negativo, $0<x<4$.

Solução: $[1, 4)$, com os inteiros 1, 2 e 3.