FICHA DE MATEMÁTICA

Função do 2º grau

Máximo e mínimo

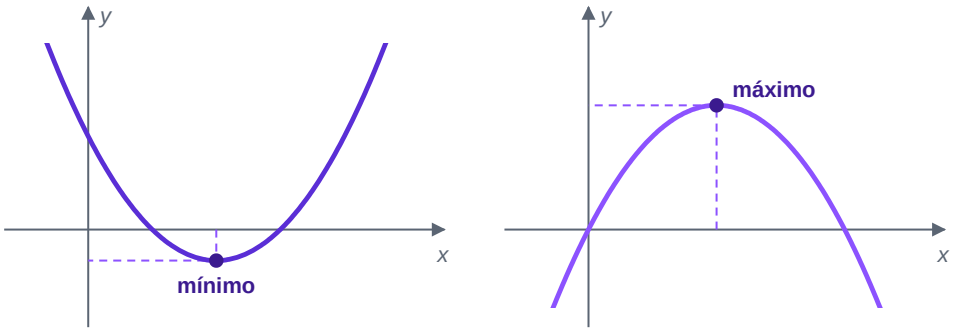
Aluno(a): _____ | **Data:** ___/___/____ | **Prof.:** Luis Teixeira

1. TEORIA

1.1 O vértice: máximo ou mínimo

Toda parábola tem um ponto em que a função deixa de decrescer e passa a crescer (ou o contrário): o **vértice** $V(x_V, y_V)$.

- Se $a > 0$ (concavidade para cima), o vértice é o ponto **mais baixo**: f tem **valor mínimo** y_V, atingido em $x = x_V$.
- Se $a < 0$ (concavidade para baixo), o vértice é o ponto **mais alto**: f tem **valor máximo** y_V, atingido em $x = x_V$.



$a > 0$: **o vértice é o ponto mais baixo** $a < 0$: **o vértice é o ponto mais alto**

O vértice $V(x_V, y_V)$ separa o trecho em que a função decresce do trecho em que ela cresce.

> **ERRO COMUM**
>
> Confundir **ponto de máximo** com **valor máximo**. O valor máximo (ou mínimo) é y_V, o maior (ou menor) valor assumido pela função; x_V é o valor de x em que ele ocorre. Leia com atenção o que a questão pede.

1.2 Calculando x_V pela simetria

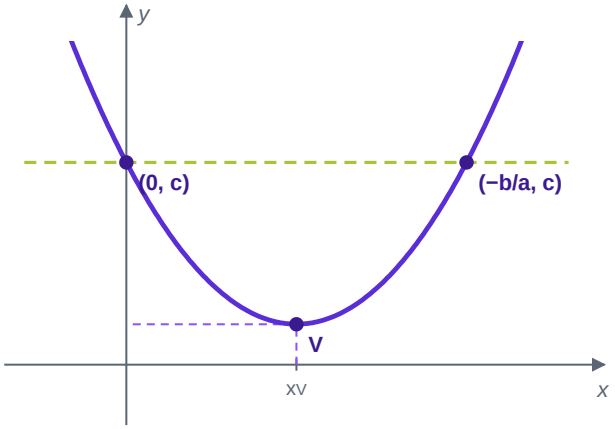
A parábola é **simétrica** em relação à reta vertical que passa pelo vértice (o **eixo de simetria**). Por isso, dois pontos da parábola com a **mesma ordenada** ficam à mesma distância do eixo, e a abscissa do vértice é a média das abscissas desses pontos.

- **Com os zeros:** se x_1 e x_2 são zeros, eles têm a mesma ordenada (0); então

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

- **Sem usar os zeros:** $f(x) = c \Leftrightarrow ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{b}{a}$. Os pontos $(0, c)$ e $\left(-\frac{b}{a}, c\right)$ têm a mesma ordenada; logo

$$x_V = \frac{0 + \left(-\frac{b}{a}\right)}{2} = -\frac{b}{2a}.$$



Os pontos de ordenada c são simétricos em relação ao eixo $x = x_V$, e o vértice fica entre eles, sobre o eixo.
Exemplo: $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

1.3 Calculando o vértice completando o quadrado

Outra forma de obter o vértice é reescrever f como a soma de um quadrado com uma constante. Exemplo com $f(x) = x^2 - 6x + 5$:

$$x^2 - 6x + 5 = \underbrace{x^2 - 6x + 9}_{(x-3)^2} - 9 + 5 = (x-3)^2 - 4.$$

Como $(x-3)^2 \geq 0$ para todo x, temos $f(x) \geq -4$, e o valor -4 é atingido apenas quando $(x-3)^2 = 0$, isto é, em $x = 3$. Logo, o **mínimo** é -4, no ponto $V(3, -4)$.

Fazendo o mesmo com $ax^2 + bx + c$ em geral, chega-se à **forma canônica**:

FÓRMULAS DO VÉRTICE

$$f(x) = a\,(x - x_V)^2 + y_V, \qquad x_V = -\frac{b}{2a}, \qquad y_V = f(x_V) = -\frac{\Delta}{4a}.$$

DICA

Para obter y_V, em geral é mais rápido **substituir** x_V na função do que usar $-\frac{\Delta}{4a}$, e o risco de erro de sinal é menor. A fórmula com Δ é vantajosa quando x_V é uma fração de cálculo trabalhoso.

1.4 Imagem

A imagem é o conjunto de todos os valores que $f(x)$ assume. Como o vértice é o ponto mais baixo (ou mais alto):

Concavidade	Vértice é	Imagem
$a > 0$	mínimo	$\mathrm{Im}(f) = [\,y_V, +\infty)$
$a < 0$	máximo	$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, y_V\,]$

ERRO COMUM

Escrever a imagem usando x_V. A imagem é formada por valores de y; portanto, é escrita com y_V.

1.5 Problemas de máximo e mínimo (otimização)

Muitos problemas pedem "o maior lucro", "a maior área", "a altura máxima"... Quando a grandeza pode ser escrita como uma função do 2º grau, a resposta está no vértice. Roteiro:

1. **Escolha a variável** x (a grandeza que pode variar) e escreva as outras medidas em função dela.
2. **Monte a função** da grandeza que se quer otimizar (área, lucro, produto...) e desenvolva até $ax^2 + bx + c$.
3. **Verifique a concavidade:** para haver máximo, é preciso $a < 0$; para haver mínimo, $a > 0$.
4. **Calcule** x_V (onde ocorre) e y_V (o valor ótimo).
5. **Responda ao que foi pedido**: pode ser x_V, y_V ou outra medida que dependa deles.

PROPRIEDADE

Entre todos os pares de números com **soma fixa** S, o maior produto ocorre quando os números são **iguais** ($\frac{S}{2}$ e $\frac{S}{2}$). Consequência: entre os retângulos de mesmo perímetro, o de maior área é o **quadrado**.

1.6 Quadro-resumo

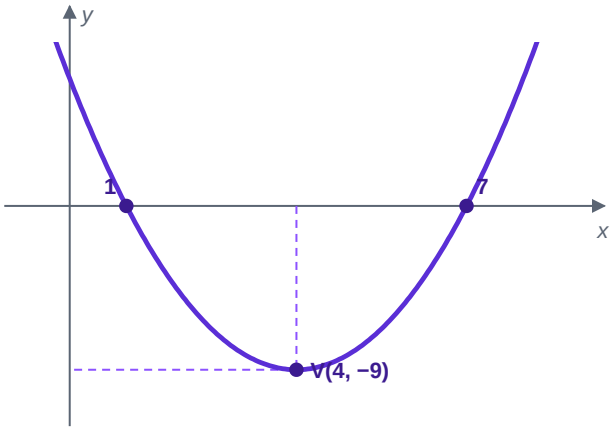
Item	Como obter
Máximo ou mínimo?	$a < 0 \Rightarrow$ máximo; $a > 0 \Rightarrow$ mínimo
Onde ocorre (x_V)	$-\frac{b}{2a}$ ou média dos zeros $\frac{x_1+x_2}{2}$
Valor ótimo (y_V)	$f(x_V)$ ou $-\frac{\Delta}{4a}$
Imagem	$[y_V, +\infty)$ se $a > 0$; $(-\infty, y_V]$ se $a < 0$
Forma canônica	$a(x - x_V)^2 + y_V$
Soma fixa S	produto máximo quando os dois números valem $\frac{S}{2}$

2. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exercício resolvido 1. Determine o vértice de $f(x) = x^2 - 8x + 7$ de três maneiras diferentes e dê o valor mínimo e a imagem.

Resolução:

1. **Pela média dos zeros:** soma 8, produto 7 ⇒ zeros 1 e 7. Então $x_V = \frac{1+7}{2} = 4$.
2. **Pela fórmula:** $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2 \cdot 1} = 4$ ✓.
3. **Completando o quadrado:** $x^2 - 8x + 7 = (x^2 - 8x + 16) - 16 + 7 = (x-4)^2 - 9$. Logo $V(4, -9)$ ✓.
4. **Conclusão:** $a = 1 > 0$ ⇒ o vértice é ponto de mínimo. Valor mínimo -9 (em $x = 4$); $\text{Im}(f) = [-9, +\infty)$.



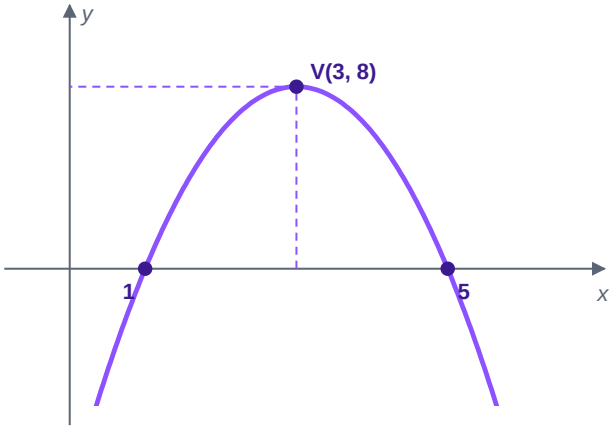
$f(x) = x^2 - 8x + 7$: a abscissa do vértice é a média dos zeros 1 e 7.

Resposta: $V(4, -9)$; mínimo -9; Im $= [-9, +\infty)$.

Exercício resolvido 2. Para $f(x) = -2x^2 + 12x - 10$, determine se há máximo ou mínimo, seu valor e a imagem.

Resolução:

1. $a = -2 < 0 \Rightarrow$ concavidade para baixo $\Rightarrow$ a função tem **máximo**.
2. $x_V = -\frac{12}{2\cdot(-2)} = -\frac{12}{-4} = 3$.
3. $y_V = f(3) = -2 \cdot 9 + 12 \cdot 3 - 10 = -18 + 36 - 10 = 8$.
4. **Conferindo com Δ:** $\Delta = 144 - 4(-2)(-10) = 144 - 80 = 64$ e $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{64}{-8} = 8$ ✓.
5. Imagem: valores menores ou iguais ao máximo, $(-\infty, 8]$.



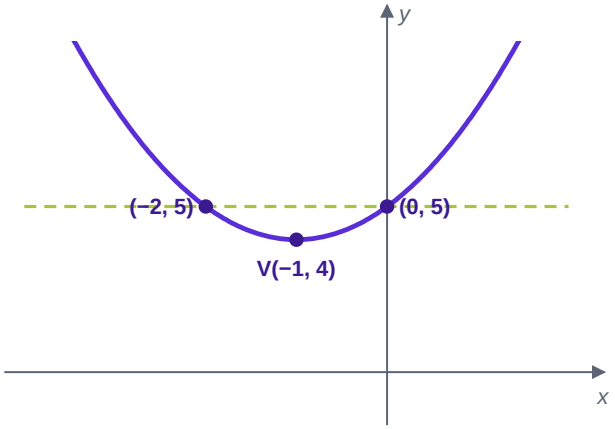
$f(x) = -2x^2 + 12x - 10$: concavidade para baixo, máximo 8.

Resposta: máximo 8, em $x = 3$; Im $= (-\infty, 8]$.

Exercício resolvido 3. A função $f(x) = x^2 + 2x + 5$ não tem zeros reais. Encontre seu vértice usando a simetria.

Resolução:

1. $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$: de fato, não há zeros reais. Não é possível usar a média dos zeros, mas a simetria continua válida.
2. **Pontos de ordenada** $c = 5$: $x^2 + 2x + 5 = 5 \iff x(x+2) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -2$.
3. **Média das abscissas:** $x_V = \frac{0+(-2)}{2} = -1$ (igual a $-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2}$ ✓).
4. $y_V = f(-1) = 1 - 2 + 5 = 4$. Como $a > 0$, o mínimo é 4.



Sem zeros reais, o vértice é obtido pela simetria entre $(0, 5)$ e $(-2, 5)$.

Resposta: $V(-1, 4)$; mínimo 4.

Exercício resolvido 4. A soma de dois números reais é 20. Qual é o maior valor possível do produto deles?

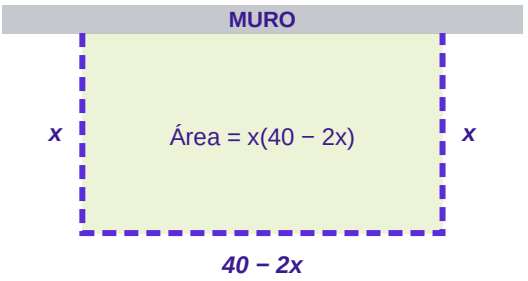
Resolução:

1. **Variável:** um número é x; como a soma é 20, o outro é $20 - x$.
2. **Função produto:** $P(x) = x(20 - x) = -x^2 + 20x$.
3. **Concavidade:** $a = -1 < 0$ ⇒ existe máximo, no vértice.
4. $x_V = -\frac{20}{2 \cdot (-1)} = 10$ e o outro número é $20 - 10 = 10$.
5. $P_{\max} = 10 \cdot 10 = 100$.

Resposta: o produto máximo é 100 (números 10 e 10).

Exercício resolvido 5. Com 40 m de cerca, um sitiante quer cercar um terreno retangular aproveitando um muro como um dos lados (a cerca é usada apenas nos outros três). Quais as dimensões que dão a maior área? Qual é essa área?

Resolução:



A cerca (tracejada) cobre apenas três lados; o muro forma o quarto.

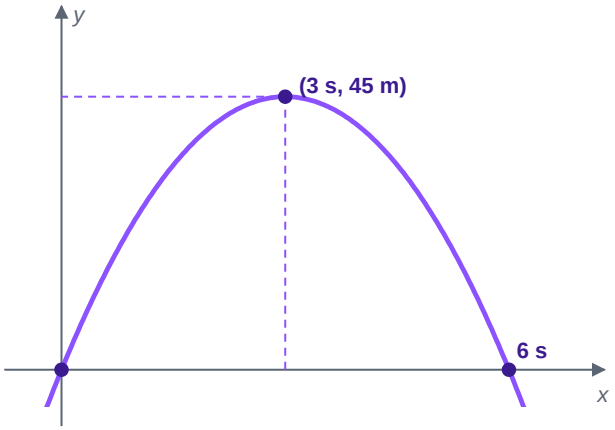
1. **Variável:** seja x a medida de cada um dos dois lados perpendiculares ao muro. O lado paralelo ao muro fica com o restante da cerca: $40 - 2x$.
2. **Área:** $A(x) = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x$.
3. **Concavidade:** $a = -2 < 0$ ⇒ máximo no vértice.
4. $x_V = -\frac{40}{2 \cdot (-2)} = 10$ m. O outro lado: $40 - 2 \cdot 10 = 20$ m.
5. $A_{\max} = 10 \cdot 20 = 200$ m². Observe que, neste caso, o retângulo de maior área **não** é um quadrado, pois o muro dispensa a cerca em um dos lados.

Resposta: 10 m × 20 m (o lado de 20 m paralelo ao muro); área máxima 200 m².

Exercício resolvido 6. Uma bola é chutada para cima e sua altura, em metros, após t segundos é $h(t) = -5t^2 + 30t$. Qual a altura máxima atingida e em que instante? Quando a bola volta ao chão?

Resolução:

1. $a = -5 < 0 \Rightarrow$ a altura tem máximo.
2. **Instante:** $t_V = -\frac{30}{2\cdot(-5)} = 3$ s.
3. **Altura máxima:** $h(3) = -5 \cdot 9 + 30 \cdot 3 = -45 + 90 = 45$ m.
4. **Volta ao chão** quando $h(t) = 0$: $-5t(t-6) = 0 \Rightarrow t = 0$ (saída) ou $t = 6$ s.
5. **Verificação:** por simetria, a subida (0 a 3 s) dura o mesmo que a descida (3 a 6 s) ✓.



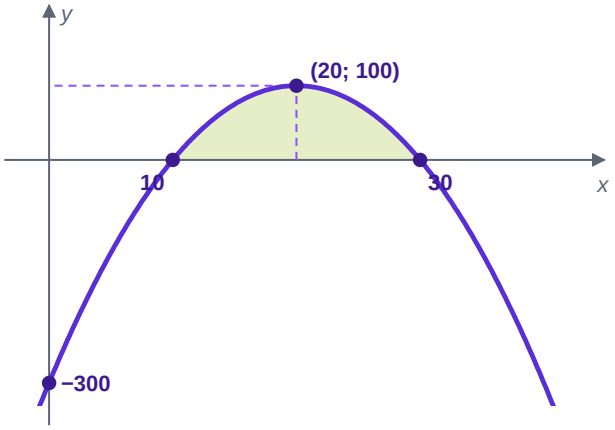
Altura $h(t) = -5t^2 + 30t$: sobe até 45 m em $t = 3$ s e volta ao chão em $t = 6$ s. (Eixo horizontal: tempo t; vertical: altura h.)

Resposta: 45 m em $t = 3$ s; volta ao chão em $t = 6$ s.

Exercício resolvido 7. O lucro de uma pequena fábrica, em reais, ao produzir x peças por dia é $L(x) = -x^2 + 40x - 300$. Quantas peças devem ser produzidas para o lucro ser máximo? Qual é esse lucro? Para que quantidades há lucro positivo?

Resolução:

1. $a = -1 < 0 \Rightarrow$ há lucro máximo.
2. $x_V = -\frac{40}{-2} = 20$ peças.
3. $L(20) = -400 + 800 - 300 = 100 \Rightarrow$ lucro máximo de R$ 100,00.
4. **Lucro zero:** $-x^2 + 40x - 300 = 0 \iff x^2 - 40x + 300 = 0$ (soma 40, produto 300) $\Rightarrow x = 10$ ou $x = 30$.
5. Como a parábola é voltada para baixo, $L > 0$ **entre** os zeros: $10 < x < 30$. Fora desse intervalo há prejuízo; por exemplo, $L(0) = -300$, pois, sem produção, os custos fixos não são cobertos.



Lucro $L(x) = -x^2 + 40x - 300$: em verde, a faixa de produção com lucro positivo; o vértice corresponde ao lucro máximo.

Resposta: 20 peças; lucro máximo R$ 100,00; lucro positivo para $10 < x < 30$.

Exercício resolvido 8. [Nível concurso] Determine k para que a função $f(x) = -x^2 + kx - 5$ tenha valor máximo igual a 4.

Resolução:

1. $a = -1 < 0$, então o máximo é y_V. Devemos ter $y_V = 4$.
2. $x_V = -\frac{k}{2\cdot(-1)} = \frac{k}{2}$.
3. $y_V = f\left(\frac{k}{2}\right) = -\frac{k^2}{4} + k \cdot \frac{k}{2} - 5 = -\frac{k^2}{4} + \frac{2k^2}{4} - 5 = \frac{k^2}{4} - 5$.
4. $\frac{k^2}{4} - 5 = 4 \Rightarrow \frac{k^2}{4} = 9 \Rightarrow k^2 = 36 \Rightarrow k = \pm 6$.
5. **Conferindo** com $k = 6$: $f(x) = -x^2 + 6x - 5$, $x_V = 3$, $f(3) = -9 + 18 - 5 = 4$ ✓. (Com $k = -6$, $x_V = -3$ e $f(-3) = 4$ ✓.)

Resposta: $k = 6$ ou $k = -6$.

3. EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01 Determine o vértice e diga se é ponto de máximo ou de mínimo:
a) $f(x) = x^2 - 4x + 7$ b) $g(x) = -x^2 + 6x$ c) $h(x) = 2x^2 + 8x + 3$ d) $p(x) = -3x^2 + 5$

02 Determine a imagem de $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

03 Escreva $f(x) = x^2 + 6x + 10$ na forma $(x - x_V)^2 + y_V$ e dê o valor mínimo.

04 A diferença entre dois números é 8. Qual o menor valor possível do produto deles? Quais são esses números?

05 Um retângulo tem perímetro 36 cm. Qual é a maior área que ele pode ter?

06 A altura de um objeto lançado é $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$ (metros, segundos). Qual a altura máxima?

4. QUESTÕES DE CONCURSOS MILITARES

Questões oficiais de provas anteriores (EFOMM, EPCAR, EsPCEx, AFA e Escola Naval), selecionadas do banco de questões da Trilha Militares.

07 [EFOMM 2019]

Considere a função real $f(x) = 1 + 4x + 2x^2$. Determine o ponto x^* que define o valor mínimo global dessa função.

(A) $x^* = -2$
(B) $x^* = -1$
(C) $x^* = -1/2$
(D) $x^* = \text{zero}$
(E) $x^* = 1$

08 [EFOMM 2019]

Examine a função real $f(x) = 2x - 3x^2$ quanto à existência de valores e pontos de máximos e mínimos. Analise o problema e assinale a alternativa CORRETA.

(A) A função atinge o valor máximo de 2/3, no ponto x = 1/3.
(B) A função atinge o valor mínimo de 1/3, no ponto x = 1/3.
(C) A função atinge o valor máximo de 1/3, no ponto x = 2/3.
(D) A função atinge o valor mínimo de 2/3, no ponto x = 1/3.
(E) A função atinge o valor máximo de 1/3, no ponto x = 1/3.

09 [EsPCEx 2022]

Considere a função $f : [-3; 1] \to \mathbb{R}$ cuja lei de formação é $f(x) = x^2 - 4$. Sejam L, H (pertencentes à Imagem de f) e r (pertencente ao Domínio de f) tais que: L é valor mínimo de f H é valor máximo de f r é zero de f Os valores de L, H e r são, respectivamente,

(A) 0; −3 e 2.
(B) −3; 0 e 2.
(C) −4; −3 e −2.
(D) −4; 5 e −2.
(E) −4; 5 e 2.

10 [EsPCEx 2023]

Um depósito de munições no formato retangular será construído em um campo de instrução do Exército Brasileiro. A planta da construção prevê que esse retângulo esteja inscrito em uma área cujo formato é de um triângulo isósceles de base 24m e altura 16m. A área máxima do depósito que atende a essas condições é igual a:

(A) 32 m²
(B) 48 m²
(C) 64 m²
(D) 72 m²
(E) 96 m²

5. GABARITO COMENTADO

Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.
07	B	08	E	09	D	10	E

▼ 01 a 06 – Fixação

01. a) $x_V = 2$, $f(2) = 4 - 8 + 7 = 3 \Rightarrow V(2, 3)$, mínimo ($a > 0$). b) $x_V = 3$, $g(3) = -9 + 18 = 9 \Rightarrow V(3, 9)$, máximo. c) $x_V = -\frac{8}{4} = -2$, $h(-2) = 8 - 16 + 3 = -5 \Rightarrow V(-2, -5)$, mínimo. d) $b = 0 \Rightarrow x_V = 0$, $p(0) = 5 \Rightarrow V(0, 5)$, máximo.

02. $a = -1$; $x_V = 1$, $f(1) = -1 + 2 + 3 = 4 \Rightarrow \text{Im} = (-\infty, 4]$.

03. $x^2 + 6x + 10 = (x^2 + 6x + 9) + 1 = (x + 3)^2 + 1$. Mínimo 1, em $x = -3$.

04. Números x e $x + 8$: $P(x) = x^2 + 8x$, $a > 0 \Rightarrow$ mínimo em $x_V = -4$. Números -4 e 4; produto mínimo -16.

05. Lados x e $18 - x$ (semiperímetro 18): $A = -x^2 + 18x$, $x_V = 9 \Rightarrow$ quadrado 9×9, área 81 cm².

06. $t_V = -\frac{20}{-10} = 2$ s; $h(2) = -20 + 40 + 1 = 21$ m.

▼ 07 a 10 – Concursos militares

07 (B) · EFOMM 2019.

Como $a = 2 > 0$, a parábola tem concavidade para cima e o mínimo global ocorre no vértice:

$$x^* = x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 2} = -1$$

08 (E) · EFOMM 2019.

O coeficiente de x^2 é negativo: há máximo, no vértice.

$$x_v = -\frac{2}{2 \cdot (-3)} = \frac{1}{3}, \qquad f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

09 (D) · EsPCEx 2022.

O vértice $x = 0$ está no domínio: $L = f(0) = -4$. O máximo fica na extremidade mais distante do vértice: $H = f(-3) = 5$ (contra $f(1) = -3$).

Zeros de f: $x = \pm 2$, mas só $-2 \in [-3; 1]$. Logo $r = -2$.

10 (E) · EsPCEx 2023.

Com o retângulo apoiado na base, de altura y, a largura é $24\left(1 - \frac{y}{16}\right)$:

$$S(y) = 24y - \frac{3}{2}y^2, \quad \text{máximo em } y = 8: \; S = 12 \cdot 8 = 96 \text{ m}^2$$

(O retângulo máximo tem metade da área do triângulo, $\frac{24 \cdot 16}{4}$.)