PROF. LUIS TEIXEIRA
Física | Matemática

FICHA DE MATEMÁTICA

Função do 2º grau

Análise do gráfico

Aluno(a): _____ | **Data:** ___/___/___ | **Prof.:** Luis Teixeira

1. TEORIA

1.1 O que é uma função do 2º grau

DEFINIÇÃO

Função do 2º grau (ou **função quadrática**) é toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que pode ser escrita na forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$

O gráfico de toda função do 2º grau é uma curva chamada **parábola**.

Os números a, b e c são os **coeficientes**. Identifique cada um com o seu sinal antes de efetuar qualquer cálculo:

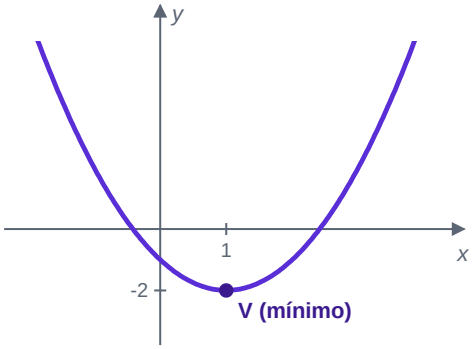
Função	a	b	c
$f(x) = 2x^2 - 3x + 1$	2	-3	1
$f(x) = -x^2 + 5$	-1	0	5
$f(x) = x^2 - 4x$	1	-4	0
$f(x) = 3 - x - x^2$ (termos fora da ordem usual)	-1	-1	3

ATENÇÃO

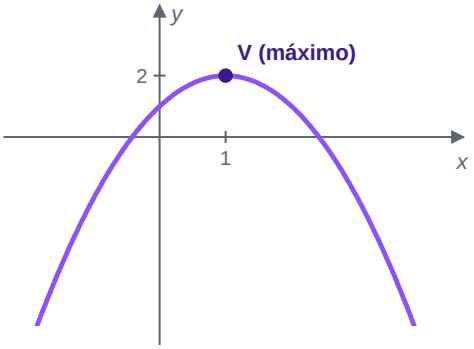
Se $a = 0$, a função **não** é do 2º grau: ela se reduz a $f(x) = bx + c$, cujo gráfico é uma reta. Por isso, em questões com parâmetro, como $f(x) = (m-3)x^2 + 2x - 1$, a condição para que a função seja quadrática é $m - 3 \neq 0$, isto é, $m \neq 3$.

1.2 Concavidade: o papel de a

O sinal de a determina o sentido da concavidade da parábola. **Justificativa.** Quando $|x|$ é muito grande, o termo ax^2 cresce muito mais depressa que $bx + c$ e passa a determinar o sinal de $f(x)$. Se $a > 0$, os valores de f tornam-se grandes e positivos nas extremidades do gráfico (concavidade para cima); se $a < 0$, tornam-se grandes e negativos (concavidade para baixo).



$a > 0$: concavidade voltada para cima; o vértice é ponto de **mínimo**.



$a < 0$: concavidade voltada para baixo; o vértice é ponto de **máximo**.

> **DICA**
>
> Quanto maior o valor de $|a|$, mais fechada (estreita) é a parábola. Ex.: $y = 5x^2$ é mais fechada que $y = x^2$, que é mais fechada que $y = 0{,}2x^2$.

1.3 Corte com o eixo y: o papel de c

Todo ponto do eixo y tem $x = 0$. Substituindo: $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$. Logo, a parábola sempre corta o eixo y no ponto $\boxed{(0,\ c)}$.

Exemplo: $f(x) = x^2 - 6x + 5$ corta o eixo y em $(0, 5)$; $g(x) = -x^2 + 4x$ passa pela origem $(0, 0)$, pois $c = 0$.

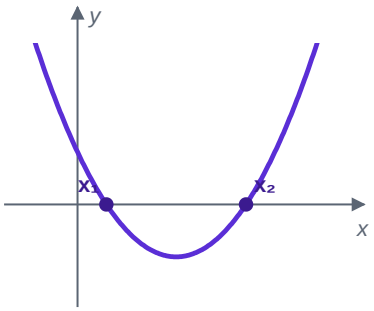
1.4 Zeros (raízes) e o discriminante Δ

Os zeros são os valores de x em que $f(x) = 0$, isto é, as abscissas dos pontos em que a parábola encontra o eixo x. Para encontrá-los, resolvemos $ax^2 + bx + c = 0$ pela fórmula de Bhaskara:

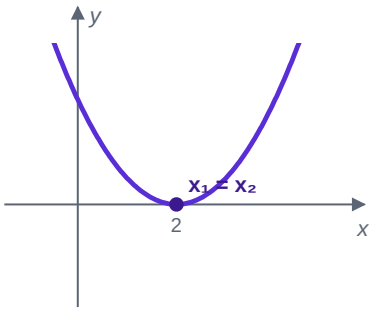
> **FÓRMULA**
>
> $$\Delta = b^2 - 4ac \qquad\qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

O número Δ (delta, o **discriminante**) fica dentro da raiz quadrada. Como não existe raiz quadrada real de número negativo, o sinal de Δ indica quantas raízes reais existem e, portanto, em quantos pontos a parábola encontra o eixo x:

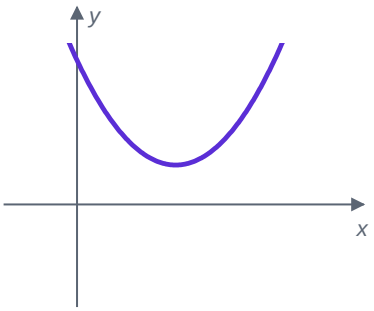
Δ	Raízes reais	Gráfico × eixo x
$\Delta > 0$	duas distintas ($x_1 \neq x_2$)	corta em 2 pontos
$\Delta = 0$	uma raiz dupla ($x_1 = x_2$)	tangencia (toca no vértice)
$\Delta < 0$	nenhuma	não toca o eixo x



$\Delta > 0$: corta o eixo x em 2 pontos



$\Delta = 0$: toca o eixo x apenas no vértice



$\Delta < 0$: não toca o eixo x

ERROS COMUNS NO Δ

- b^2 nunca é negativo: se $b = -6$, então $b^2 = (-6)^2 = 36$, e não -36.
- Cuidado com o sinal de $-4ac$: em $x^2 + 2x - 3$, temos $-4 \cdot 1 \cdot (-3) = +12$, logo $\Delta = 4 + 12 = 16$.
- Em $-b$: se $b = -6$, então $-b = +6$.

Soma e produto. Somando e multiplicando as duas raízes da fórmula de Bhaskara, obtemos

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Exemplo: em $x^2 - 6x + 5 = 0$, a soma é 6 e o produto é 5; logo, as raízes são 1 e 5. Quando as raízes são inteiras, esse cálculo mental é mais rápido que a fórmula.

1.5 O vértice

O vértice $V = (x_V, y_V)$ é o ponto mais baixo (se $a > 0$) ou mais alto (se $a < 0$) da parábola.

FÓRMULAS DO VÉRTICE

$$x_V = -\frac{b}{2a} \qquad y_V = -\frac{\Delta}{4a} \quad \text{ou, mais simples,} \quad y_V = f(x_V).$$

Origem da fórmula de x_V. Como a parábola é simétrica, o vértice fica exatamente no ponto médio entre as raízes:

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b}{2a}.$$

Essa fórmula vale mesmo quando não há raízes reais, o que se verifica **completando o quadrado**:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

O termo $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ vale zero quando $x = -\frac{b}{2a}$ e, para os demais valores de x, tem o sinal de a. Por isso, o valor extremo de f ocorre em $x_V = -\frac{b}{2a}$ e vale $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$.

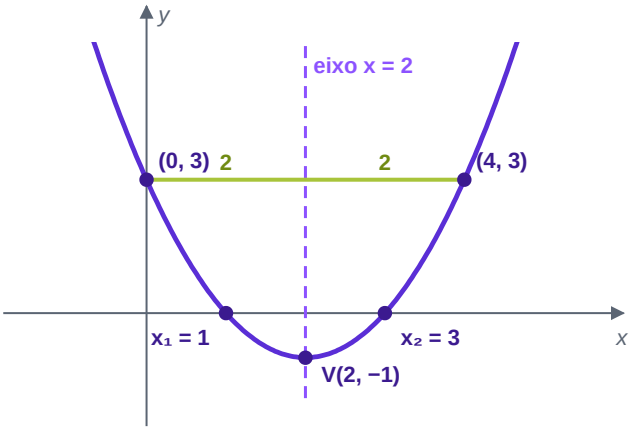
Exemplo: $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$: $x_V = -\frac{-8}{2 \cdot 2} = 2$ e $y_V = f(2) = 8 - 16 + 3 = -5$. Logo $V(2, -5)$.

DICA

Para obter y_V, em geral é mais rápido **substituir x_V na função** do que usar $-\Delta/4a$, e o risco de erro de sinal é menor.

1.6 Eixo de simetria

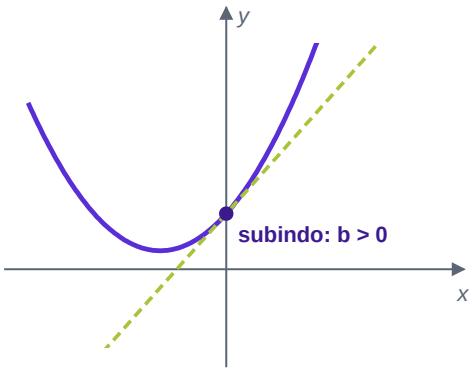
A reta vertical $x = x_V$ divide a parábola em duas partes simétricas. Uma consequência muito utilizada: **dois pontos da parábola com a mesma ordenada estão à mesma distância do eixo**. Assim, se $f(p) = f(q)$ com $p \neq q$, então $x_V = \dfrac{p+q}{2}$.



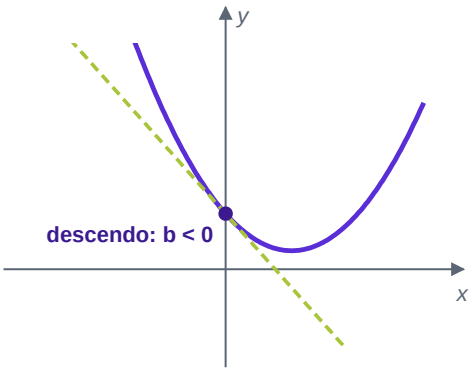
$f(x) = x^2 - 4x + 3$: pontos de mesma ordenada ficam à mesma distância do eixo de simetria.

1.7 Lendo os sinais de a, b e c no gráfico

- a: se a concavidade é voltada para cima, $a > 0$; se é voltada para baixo, $a < 0$.
- c: é a ordenada do ponto em que a curva corta o eixo y. Se esse ponto está acima da origem, $c > 0$; abaixo, $c < 0$; na origem, $c = 0$.
- b: observe a curva no ponto em que ela cruza o eixo y. Se, nesse ponto, ela está subindo (da esquerda para a direita), $b > 0$; se está descendo, $b < 0$; se o vértice está sobre o eixo y, $b = 0$.



Ao cruzar o eixo y, a curva está **subindo**: $b > 0$.



Ao cruzar o eixo y, a curva está **descendo**: $b < 0$.

OBSERVAÇÃO

O sinal de b também pode ser obtido por $x_V = -\dfrac{b}{2a}$: se o vértice está à direita do eixo y ($x_V > 0$), a e b têm sinais **contrários**; se está à esquerda ($x_V < 0$), a e b têm o **mesmo** sinal.

1.8 Imagem, valor máximo/mínimo e crescimento

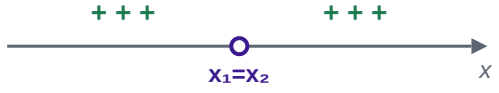
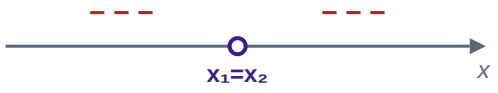
	$a > 0$ **(para cima)**	$a < 0$ **(para baixo)**
Vértice é ponto de	mínimo	máximo
Valor mínimo/máximo	y_V (mínimo)	y_V (máximo)
Imagem	$\text{Im} = [y_V, +\infty)$	$\text{Im} = (-\infty, y_V]$
Decrescente para	$x \leq x_V$	$x \geq x_V$
Crescente para	$x \geq x_V$	$x \leq x_V$

ERRO COMUM

Confundir x_V com y_V. O valor máximo (ou mínimo) da função é y_V; o valor de x em que ele ocorre é x_V. Leia a pergunta com atenção.

1.9 Estudo do sinal

Estudar o sinal de f é determinar para quais valores de x se tem $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ e $f(x) < 0$. Para isso, são necessárias a concavidade e as raízes:

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$		

REGRA PRÁTICA (Δ > 0)

Fora das raízes, f tem o mesmo sinal de a; **entre** as raízes, tem o sinal contrário ao de a.

1.10 Três formas de escrever a mesma função

FORMAS DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

- **Geral:** $f(x) = ax^2 + bx + c$, que mostra c (corte no eixo y).
- **Fatorada:** $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, que mostra as raízes; é a mais útil quando o problema fornece as raízes.

- **Canônica:** $f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V$, que mostra o vértice; é a mais útil quando o problema fornece o vértice.

Ex.: $x^2 - 4x + 3 \;=\; (x-1)(x-3) \;=\; (x-2)^2 - 1$.

1.11 Roteiro para esboçar o gráfico

1. Identifique a, b, c e a concavidade (sinal de a).
2. Marque o corte no eixo y: $(0, c)$.
3. Calcule Δ e as raízes (se existirem).
4. Calcule o vértice: $x_V = -\frac{b}{2a}$ e $y_V = f(x_V)$.
5. Use a simetria para marcar o simétrico de $(0, c)$ em relação ao eixo: o ponto $(2x_V,\, c)$.
6. Ligue os pontos com uma curva suave; a parábola não forma bico, nem mesmo no vértice.

QUADRO-RESUMO

Elemento	Como obter
Concavidade	sinal de a
Corte no eixo y	$(0,\, c)$
Nº de raízes reais	sinal de $\Delta = b^2 - 4ac$
Raízes	$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou soma $= -\frac{b}{a}$, produto $= \frac{c}{a}$
Vértice	$x_V = -\frac{b}{2a},\; y_V = f(x_V) = -\frac{\Delta}{4a}$
Máximo / mínimo	y_V ($a < 0$: máximo; $a > 0$: mínimo)
Imagem	$[y_V, +\infty)$ se $a > 0$; $(-\infty, y_V]$ se $a < 0$
Tangente ao eixo x	$\Delta = 0$
Não toca o eixo x	$\Delta < 0$

2. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exercício resolvido 1. Faça o estudo completo da função $f(x) = x^2 - 6x + 5$: concavidade, corte com o eixo y, raízes, vértice, imagem, intervalos de crescimento e sinal. Esboce o gráfico.

Resolução: Seguimos o roteiro do item 1.11.

1. **Coeficientes:** $a = 1, b = -6, c = 5$. Como $a = 1 > 0$, a concavidade é **para cima**, e o vértice será ponto de mínimo.
2. **Corte no eixo y:** $f(0) = c = 5 \Rightarrow$ ponto $(0, 5)$.

3. **Raízes:** $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16 > 0$ ⇒ duas raízes.

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 5.$$

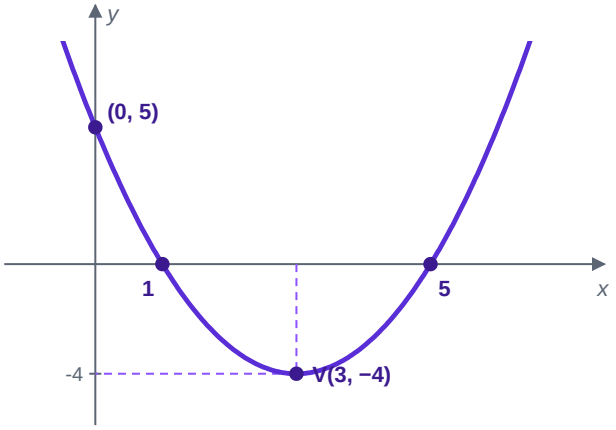
Conferência por soma e produto: $1 + 5 = 6 = -\frac{b}{a}$ ✓ e $1 \cdot 5 = 5 = \frac{c}{a}$ ✓.

4. **Vértice:** $x_V = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = 3$ (que é o ponto médio de 1 e 5 ✓). $y_V = f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$. Logo $V(3, -4)$.

5. **Imagem:** como $a > 0$, o menor valor é $y_V = -4$: $\text{Im}(f) = [-4, +\infty)$.

6. **Crescimento:** decrescente para $x \leq 3$ e crescente para $x \geq 3$.

7. **Sinal:** $a > 0$ ⇒ positiva fora das raízes, negativa entre elas.



Esboço de $f(x) = x^2 - 6x + 5$.



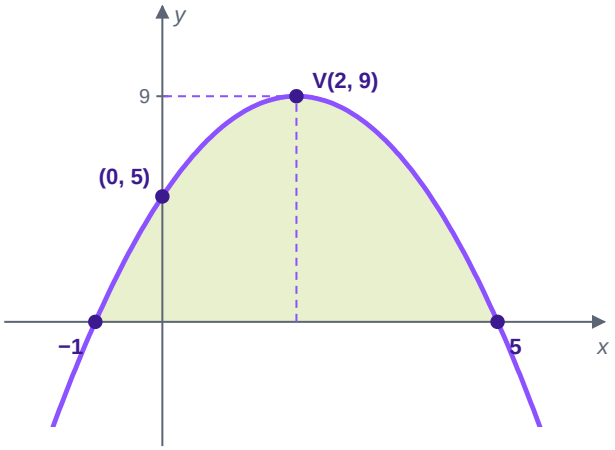
Quadro de sinais de f.

Resposta: $V(3, -4)$; **raízes** 1 e 5; **Im** $= [-4, +\infty)$; $f > 0$ **se** $x < 1$ **ou** $x > 5$; $f < 0$ **se** $1 < x < 5$.

Exercício resolvido 2. Para $f(x) = -x^2 + 4x + 5$, determine o valor máximo, a imagem e os valores de x para os quais $f(x) > 0$.

Resolução:

1. $a = -1 < 0$: concavidade para baixo ⇒ o vértice é ponto de **máximo**.
2. $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-1)} = 2$ e $y_V = f(2) = -4 + 8 + 5 = 9$. O valor máximo é 9.
3. Imagem: todos os valores menores ou iguais ao máximo, $\text{Im} = (-\infty, 9]$.
4. Raízes: $-x^2 + 4x + 5 = 0$. Multiplicando por -1: $x^2 - 4x - 5 = 0$ (soma 4, produto -5) ⇒ $x_1 = -1$, $x_2 = 5$.
5. Como $a < 0$, a função é positiva **entre** as raízes (sinal contrário ao de a).



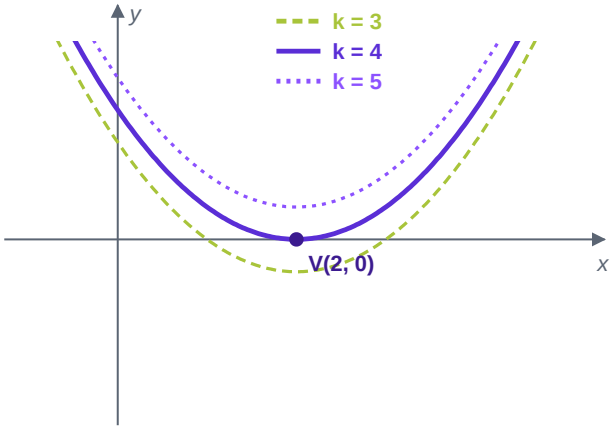
Em verde, a região em que $f(x) > 0$ (entre as raízes).

Resposta: máximo 9; Im $= (-\infty, 9]$; $f(x) > 0 \iff -1 < x < 5$.

Exercício resolvido 3. Determine k para que o gráfico de $f(x) = x^2 - 4x + k$ seja tangente ao eixo das abscissas. Em seguida, dê o ponto de tangência.

Resolução:

1. **Interpretação:** ser tangente ao eixo x significa tocar o eixo em um único ponto, isto é, ter raiz dupla; logo, $\Delta = 0$.
2. $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k = 16 - 4k$. Fazendo $16 - 4k = 0 \Rightarrow k = 4$.
3. Com $k = 4$: $f(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$. A raiz dupla é $x = 2$, que é também o vértice: $V(2, 0)$.



Aumentar k desloca a parábola para cima. Apenas para $k = 4$ ela tangencia o eixo x.

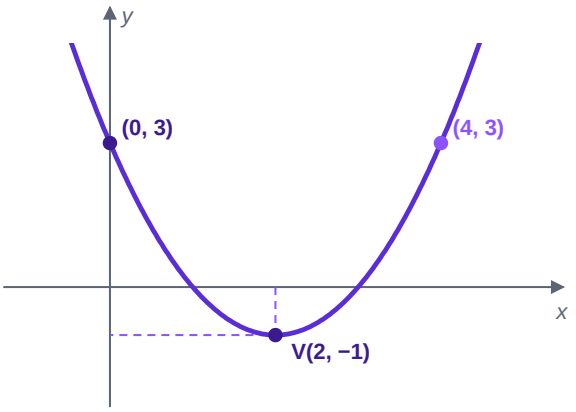
Resposta: $k = 4$; ponto de tangência $(2, 0)$.

Exercício resolvido 4. Uma parábola tem vértice $V(2, -1)$ e passa pelo ponto $(0, 3)$. Determine a lei da função.

Resolução:

1. Como foi dado o **vértice**, use a forma canônica $f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V$: $f(x) = a(x - 2)^2 - 1$.
2. Resta determinar a. Pelo ponto $(0, 3)$, tem-se $f(0) = 3$: $a(0 - 2)^2 - 1 = 3 \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1$.

3. Desenvolvendo: $f(x) = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 4 - 1 = x^2 - 4x + 3$.
4. **Conferência:** $x_V = -\frac{-4}{2} = 2$ ✓ e $f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$ ✓.



A parábola $f(x) = x^2 - 4x + 3$. O ponto $(4, 3)$ é o simétrico de $(0, 3)$.

Resposta: $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Exercício resolvido 5. O gráfico abaixo é de uma função quadrática com raízes -1 e 3 que passa pelo ponto $(1, -4)$. Determine a lei de f e o valor de $f(4)$.

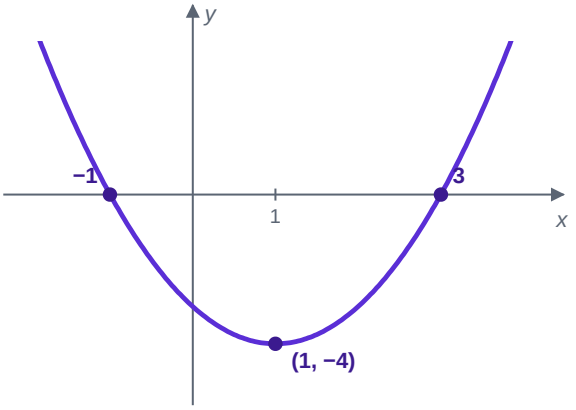


Gráfico dado: raízes -1 e 3, passando por $(1, -4)$.

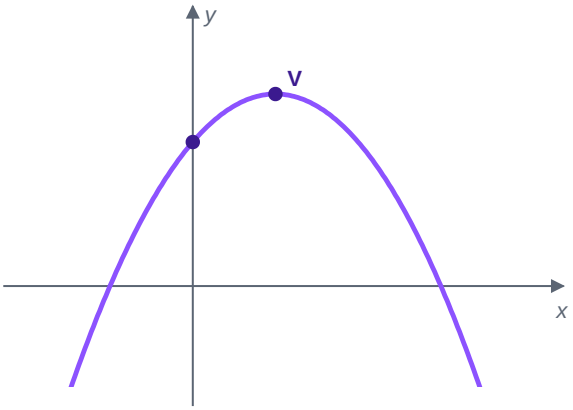
Resolução:

1. Como foram dadas as **raízes**, use a forma fatorada: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x+1)(x-3)$.
2. Use o ponto $(1, -4)$: $a(1+1)(1-3) = -4 \Rightarrow a \cdot 2 \cdot (-2) = -4 \Rightarrow -4a = -4 \Rightarrow a = 1$.
3. $f(x) = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$.
4. $f(4) = 16 - 8 - 3 = 5$.

Observe que $(1, -4)$ é o próprio vértice: $x_V = \frac{-1+3}{2} = 1$.

Resposta: $f(x) = x^2 - 2x - 3$ **e** $f(4) = 5$.

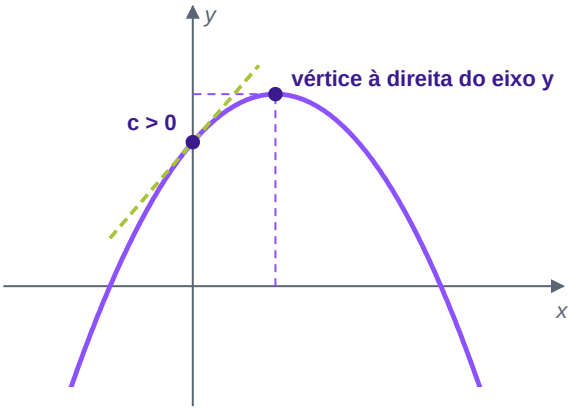
Exercício resolvido 6. A figura mostra o gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$. Determine os sinais de a, b, c e Δ.



Determine os sinais de a, b e c (figura sem escala).

Resolução:

1. a: a concavidade é para baixo ⇒ $a < 0$.
2. c: a curva corta o eixo y acima da origem ⇒ $c > 0$.
3. b: no ponto $(0, c)$, a curva ainda está **subindo** (o vértice está à direita do eixo y); logo, $b > 0$. Pela fórmula: $x_V = -\frac{b}{2a} > 0$ com $a < 0$ só é possível se $b > 0$.
4. Δ: a parábola corta o eixo x em dois pontos ⇒ $\Delta > 0$.



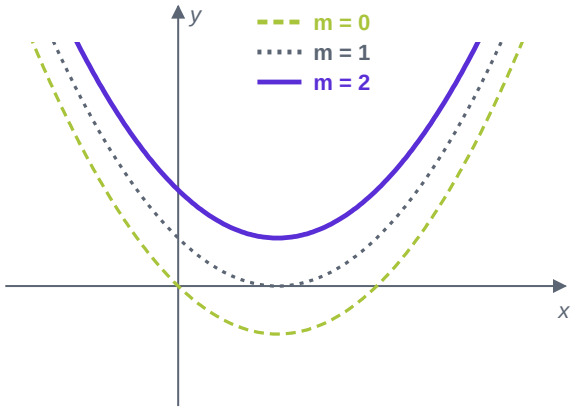
Em tracejado, a direção da curva no ponto $(0, c)$: ela está subindo.

Resposta: $a < 0, b > 0, c > 0, \Delta > 0$.

Exercício resolvido 7. Para quais valores de m a função $f(x) = x^2 - 2x + m$ é positiva para todo x real?

Resolução:

1. **Interpretação:** ser positiva para todo x significa que o gráfico fica inteiramente acima do eixo x.
2. Para isso, são necessárias concavidade para cima ($a = 1 > 0$ ✓) e ausência de pontos no eixo x, isto é, $\Delta < 0$.
3. $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 4 - 4m < 0 \Rightarrow 4 < 4m \Rightarrow m > 1$.
4. O valor $m = 1$ **não** serve: $f(x) = (x-1)^2$ vale 0 em $x = 1$ (não é positiva ali).



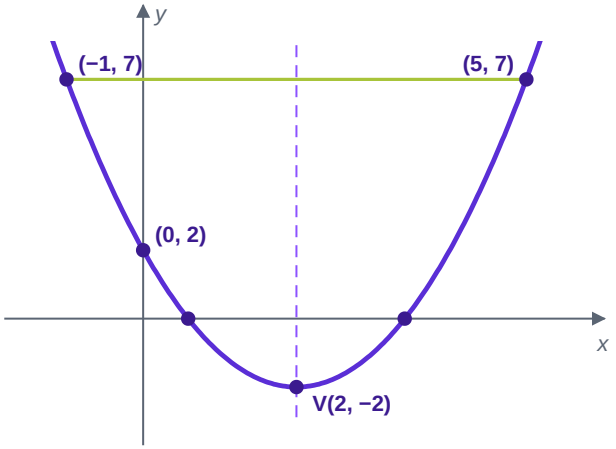
Para $m > 1$, a parábola fica inteiramente acima do eixo x.

Resposta: $m > 1$.

Exercício resolvido 8 [nível concurso]. O gráfico de uma função quadrática passa pelos pontos $(-1, 7)$ e $(5, 7)$, e o valor mínimo da função é -2. Determine a lei da função, o ponto em que o gráfico corta o eixo y e as raízes.

Resolução:

1. **Simetria:** $(-1, 7)$ e $(5, 7)$ têm a mesma ordenada; logo, são simétricos em relação ao eixo de simetria: $x_V = \frac{-1+5}{2} = 2$.
2. **Vértice:** o valor mínimo é $y_V = -2 \Rightarrow V(2, -2)$; como há mínimo, $a > 0$.
3. **Forma canônica:** $f(x) = a(x-2)^2 - 2$. Usando $(5, 7)$: $a \cdot 9 - 2 = 7 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = (x-2)^2 - 2 = x^2 - 4x + 2$.
4. **Eixo y:** $c = 2 \Rightarrow$ ponto $(0, 2)$.
5. **Raízes:** $(x-2)^2 - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 2 \Rightarrow x - 2 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$.



Os pontos de mesma ordenada $(-1, 7)$ e $(5, 7)$ determinam o eixo $x = 2$.

Resposta: $f(x) = x^2 - 4x + 2$; corta o eixo y em $(0, 2)$; raízes $2 - \sqrt{2}$ e $2 + \sqrt{2}$.

3. EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01 Para cada função, informe a concavidade, o ponto de corte com o eixo y, as raízes e o vértice:
a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ b) $g(x) = -x^2 + 2x + 8$ c) $h(x) = 2x^2 - 8$ d) $p(x) = x^2 + 2x + 5$

02 Determine a imagem de $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$.

03 Para quais valores de m a função $f(x) = (m-3)x^2 + 2x - 1$ tem concavidade voltada para baixo?

04 Calcule k para que $f(x) = x^2 + kx + 9$ **não** intercepte o eixo das abscissas.

05 Faça o estudo do sinal de $f(x) = -x^2 + x + 6$.

06 Encontre a lei da função quadrática cujas raízes são -1 e 3 e cujo gráfico passa por $(0, -6)$.

4. QUESTÕES DE CONCURSOS MILITARES

Questões oficiais de provas anteriores (EFOMM, EPCAR, EsPCEx, AFA e Escola Naval), selecionadas do banco de questões da Trilha Militares.

07 [EPCAR 2027]

Na Turma Alfa do Primeiro Esquadrão do CPCAR 2026, o mestre de matemática apresentou a função $f(x) = x^2 - 2x + 4$ e seu respectivo gráfico. Em seguida, pediu para que os alunos, com auxílio do geogebra, construíssem os gráficos das funções:

$$g(x) = x^2 - 2x + 2, \qquad h(x) = x^2 - 2x + 8, \qquad i(x) = x^2 - 2x + 16$$

Sobre os gráficos de $g(x)$, $h(x)$ e $i(x)$ em relação ao gráfico de $f(x)$, analise as sentenças abaixo, classificando-as em verdadeira ou falsa e assinale a alternativa correta.

I) Interceptarão o eixo das abscissas no mesmo ponto.

II) Terão o mesmo conjunto imagem.

III) Terão o mesmo valor para a abscissa do vértice.

(A) Todas as sentenças são verdadeiras.
(B) Todas as sentenças são falsas.
(C) Apenas uma sentença é verdadeira.
(D) Apenas duas sentenças são verdadeiras.

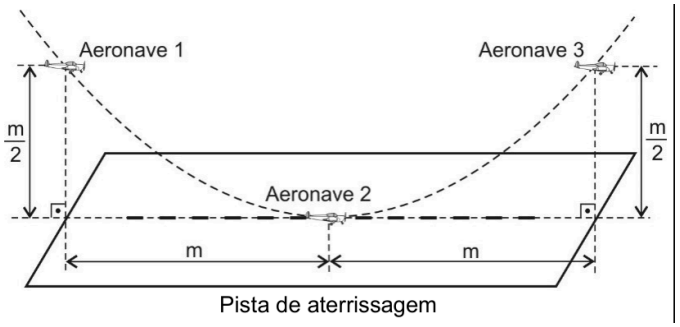
08 [EsPCEx 2019]

Considere a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 3x + c$, com $c \in \mathbb{R}$, cujo gráfico no plano cartesiano é uma parábola. Variando-se os valores de c, os vértices das parábolas obtidas pertencem à reta de equação:

(A) $y = 2x - \frac{9}{2}$.
(B) $x = -\frac{3}{2}$.
(C) $x = -\frac{9}{2}$.
(D) $y = -\frac{9}{2}$.
(E) $x = \frac{3}{2}$.

09 [EPCAR 2022]

Em um exercício de aperfeiçoamento de Cadetes da Força Aérea Brasileira, três aeronaves estão posicionadas como indicado na figura a seguir.



Em certo momento, as aeronaves 1, 2 e 3 são vistas de um determinado ponto, seguindo uma trajetória de voo sobre a curva de uma parábola, sendo dadas suas distâncias de referência como a da figura.

Considere um plano cartesiano em que:

• as aeronaves 1, 2 e 3 estão sobre a trajetória de uma única parábola;

• a pista de aterrissagem está no eixo das abscissas;

• a posição de cada aeronave é um ponto (x, y) desse plano, onde $y = f(x)$ é a altura atingida pela aeronave, em km, em relação ao chão; e

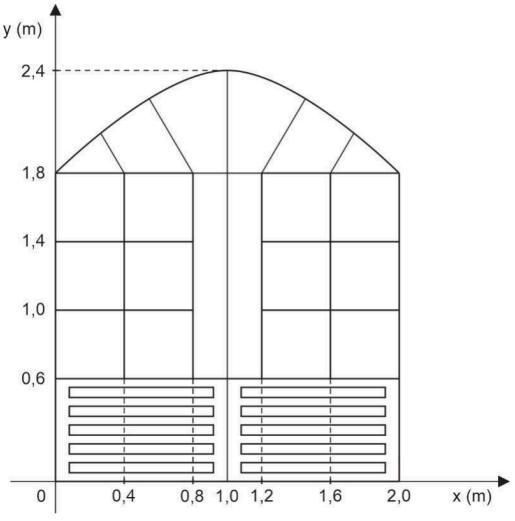
• o eixo das ordenadas passa pela aeronave 1

A lei da função f que satisfaz as condições estabelecidas na figura é

(A) $f(x) = \left(\frac{1}{2m}\right)(x - m)^2$
(B) $f(x) = \left(\frac{1}{m}\right)(x + m)^2$
(C) $f(x) = \left(\frac{1}{2m}\right)(x - 2m)^2$
(D) $f(x) = \left(\frac{1}{2m}\right)x^2$

10 [EPCAR 2026]

Um artista plástico fez um passeio por cidades históricas de Minas Gerais. Ele ficou encantado com as janelas das casas do período colonial. Ao retornar ao seu ateliê, resolveu reproduzir uma das janelas usando um programa de computador que produz, em escala, as coordenadas cartesianas e as curvas de uma figura nele inserida. A figura abaixo reproduz a janela colocada no programa de computador, com referencial nos eixos cartesianos, e suas medidas em metros.



O arco superior da janela é parte de uma parábola, e as demais medidas apresentadas indicam o formato dos polígonos utilizados no desenho.

Considere a função real de grau 2 dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ que contém o arco superior da janela, com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Analise as afirmativas abaixo e assinale a alternativa correta:

I) Se $f(x) = 0 \Rightarrow x \in \{p, q\}$, então $p + q = 2$

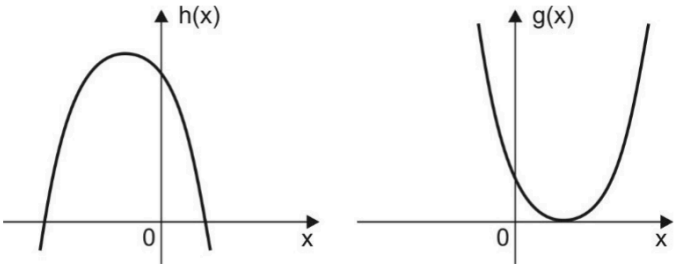
II) $a + b + c > 2$

III) $2a^2 = b$

(A) nenhuma afirmativa correta.
(B) apenas uma afirmativa correta.
(C) apenas duas afirmativas corretas.
(D) todas as afirmativas corretas.

11 [EPCAR 2022]

Nos gráficos indicados a seguir, estão desenhadas duas parábolas que representam as funções reais h e g definidas pelas leis: $h(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = dx^2 + ex + f$ com a, b, c, d, e, f números reais não nulos.



Com base nas informações e nos gráficos, é correto afirmar, necessariamente, que

(A) $bf < -\frac{e}{2d}$
(B) $e^2 \neq 4df$
(C) $ad > f - e$
(D) $-\frac{b^2-4ac}{4a} < 0$

12 [Escola Naval 2018]

Seja a família de funções reais f, definidas por $f(x) = 2x^2 + bx + 3$, sendo $b \in \mathbb{R}$ e, seja a função real g, definida pelo lugar geométrico dos pontos extremos das funções f. Sendo assim, o valor de $g(7)$ é:

(A) 101
(B) -101
(C) 95
(D) -95
(E) -98

5. GABARITO COMENTADO

Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.
07	C	08	B	09	A	10	C
11	A	12	D				

▼ 01 a 06 – Fixação

01. a) $a = 1 > 0$: cima; corte $(0, 3)$; $\Delta = 16 - 12 = 4$ ⇒ raízes $\frac{4 \pm 2}{2}$: 1 e 3; $x_V = 2$, $f(2) = -1$ ⇒ $V(2, -1)$.
b) $a = -1 < 0$: baixo; corte $(0, 8)$; $-x^2 + 2x + 8 = 0 \iff x^2 - 2x - 8 = 0$ (soma 2, produto -8) ⇒ -2 e 4; $x_V = 1$, $g(1) = -1 + 2 + 8 = 9$ ⇒ $V(1, 9)$.
c) $a = 2 > 0$: cima; corte $(0, -8)$; $2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$; $b = 0$ ⇒ $x_V = 0$ ⇒ $V(0, -8)$.
d) $a = 1 > 0$: cima; corte $(0, 5)$; $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$ ⇒ sem raízes reais; $x_V = -1$, $p(-1) = 1 - 2 + 5 = 4$ ⇒ $V(-1, 4)$.

02. $a = -2 < 0$ ⇒ há máximo. $x_V = -\frac{8}{2 \cdot (-2)} = 2$; $y_V = f(2) = -8 + 16 - 3 = 5$ ⇒ $\text{Im} = (-\infty, 5]$.

03. Concavidade para baixo ⇔ coeficiente de x^2 negativo: $m - 3 < 0 \Rightarrow m < 3$. (Para $m = 3$, a função não seria do 2º grau.)

04. Não interceptar o eixo $x \Leftrightarrow \Delta < 0$: $k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 < 0 \Rightarrow k^2 < 36 \Rightarrow -6 < k < 6$.

05. $-x^2 + x + 6 = 0 \iff x^2 - x - 6 = 0$ ⇒ raízes -2 e 3. Como $a < 0$: $f > 0$ para $-2 < x < 3$; $f < 0$ para $x < -2$ ou $x > 3$; $f = 0$ em $x = -2$ e $x = 3$.

06. Forma fatorada: $f(x) = a(x + 1)(x - 3)$. Como $f(0) = -6$: $a \cdot 1 \cdot (-3) = -6 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = 2(x^2 - 2x - 3) = 2x^2 - 4x - 6$.

▼ 07 a 12 – Concursos militares

07 (C) · EPCAR 2027.

As quatro funções diferem só na constante: os gráficos são translações verticais uns dos outros, com vértice em $x = 1$ e y mínimo igual a 3, 1, 7 e 15.

I: falsa. Nenhuma delas corta o eixo x (os discriminantes $4 - 4c$ são negativos para $c = 2, 4, 8, 16$).

II: falsa. As imagens são $[3, +\infty[$, $[1, +\infty[$, $[7, +\infty[$ e $[15, +\infty[$.

III: verdadeira. $x_v = -\frac{-2}{2} = 1$ para todas.

08 (B) · EsPCEx 2019.

A abscissa do vértice não depende de c:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}$$

Todos os vértices estão na reta vertical $x = -\frac{3}{2}$.

09 (A) · EPCAR 2022.

As aeronaves estão em $(0, \frac{m}{2})$, $(m, 0)$ e $(2m, \frac{m}{2})$. A do meio, sobre a pista, é o vértice: $f(x) = k(x - m)^2$.

$f(0) = km^2 = \frac{m}{2}$ dá $k = \frac{1}{2m}$.

10 (C) · EPCAR 2026.

A parábola passa por $(0;\ 1{,}8)$ e $(2;\ 1{,}8)$ e tem vértice em $(1;\ 2{,}4)$: $f(x) = 2{,}4 - 0{,}6(x-1)^2 = -0{,}6x^2 + 1{,}2x + 1{,}8$. Assim $a = -0{,}6$, $b = 1{,}2$ e $c = 1{,}8$.

I: as raízes são simétricas em relação ao eixo $x = 1$, e $p + q = -\frac{b}{a} = 2$. Verdadeira.

II: $a + b + c = f(1) = 2{,}4 > 2$. Verdadeira.

III: $2a^2 = 0{,}72 \neq 1{,}2$. Falsa.

11 (A) · EPCAR 2022.

h: concavidade para baixo, $a < 0$; corta o eixo y acima de 0, $c > 0$; vértice com abscissa negativa, $-\frac{b}{2a} < 0$, logo $b < 0$.

g: concavidade para cima, $d > 0$; $f = g(0) > 0$; vértice no eixo x com abscissa positiva: $e^2 - 4df = 0$ e $-\frac{e}{2d} > 0$, logo $e < 0$.

A: $bf < 0$ e $-\frac{e}{2d} > 0$. Verdadeira. B: falsa, pois $e^2 = 4df$. C: $ad < 0$ e $f - e > 0$. D: é a ordenada do vértice de h, que é positiva.

12 (D) · Escola Naval 2018.

O vértice de f tem $x_v = -\frac{b}{4}$ e $y_v = 3 - \frac{b^2}{8}$. Como $b = -4x_v$:

$$y_v = 3 - \frac{16x_v^2}{8} = 3 - 2x_v^2 \ \Rightarrow\ g(x) = 3 - 2x^2, \quad g(7) = 3 - 98 = -95$$