PROF. LUIS TEIXEIRA
Física | Matemática

FICHA DE MATEMÁTICA

Equações

Irracionais

Aluno(a): _____ | **Data:** ___/___/____ | **Prof.:** Luis Teixeira

1. TEORIA

1.1 Equação irracional

> **DEFINIÇÃO**
> Uma equação é **irracional** quando a incógnita aparece **dentro de um radical** (raiz quadrada, cúbica etc.).

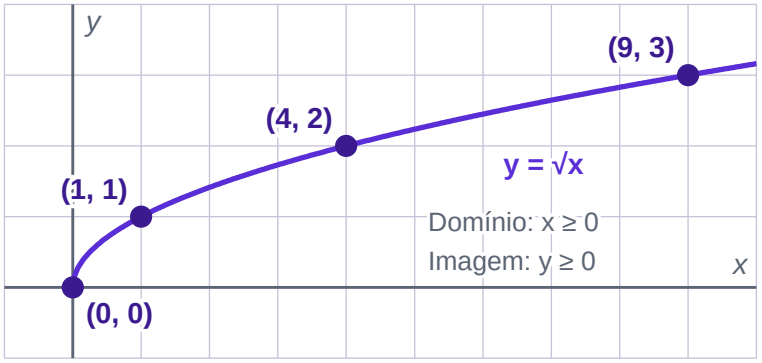
São irracionais:
$\sqrt{x+3} = 5$
$\sqrt{2x-1} = x-2$
$\sqrt[3]{x^2-1} = 2$
$\sqrt{x} + \sqrt{x+5} = 5$

Não são irracionais:
$\sqrt{2}\,x + 1 = 0$ (a raiz não contém x)
$x^2 - \sqrt{3} = 0$
Nesses casos, o x está fora do radical.

1.2 Revisão: como funciona a raiz quadrada

Por convenção, o símbolo $\sqrt{a}$ representa o número **não negativo** que, elevado ao quadrado, dá a. Por isso:

- $\sqrt{9} = 3$ (e **não** ± 3). Quem tem duas respostas é a equação $x^2 = 9$, não o símbolo $\sqrt{9}$.
- $\sqrt{a}$ só existe nos reais se $a \geq 0$; por exemplo, $\sqrt{-4}$ não é um número real.
- Para todo $a \geq 0$, tem-se $\sqrt{a} \geq 0$.



O gráfico de $y = \sqrt{x}$ só existe para $x \geq 0$ e nunca fica abaixo do eixo x.

Já a **raiz cúbica** existe para qualquer número real e pode ser negativa: $\sqrt[3]{8} = 2$ e $\sqrt[3]{-8} = -2$.

1.3 Condições de existência (C.E.)

Antes de resolver $\sqrt{A} = B$ (com índice par), anote duas condições:

CONDIÇÕES PARA $\sqrt{A} = B$

1. **Radicando não negativo:** $A \geq 0$.
2. **Segundo membro não negativo:** $B \geq 0$, pois $\sqrt{A}$ nunca é negativo.

Exemplo: em $\sqrt{x-1} = x - 7$, precisamos de $x \geq 1$ **e** $x - 7 \geq 0$, ou seja, $x \geq 7$. Qualquer valor encontrado menor que 7 deve ser descartado.

Exemplo: $\sqrt{x+4} = -3$ não tem solução, pois uma raiz quadrada nunca é igual a um número negativo. Logo, $S = \varnothing$, sem necessidade de cálculos.

1.4 Raízes estranhas

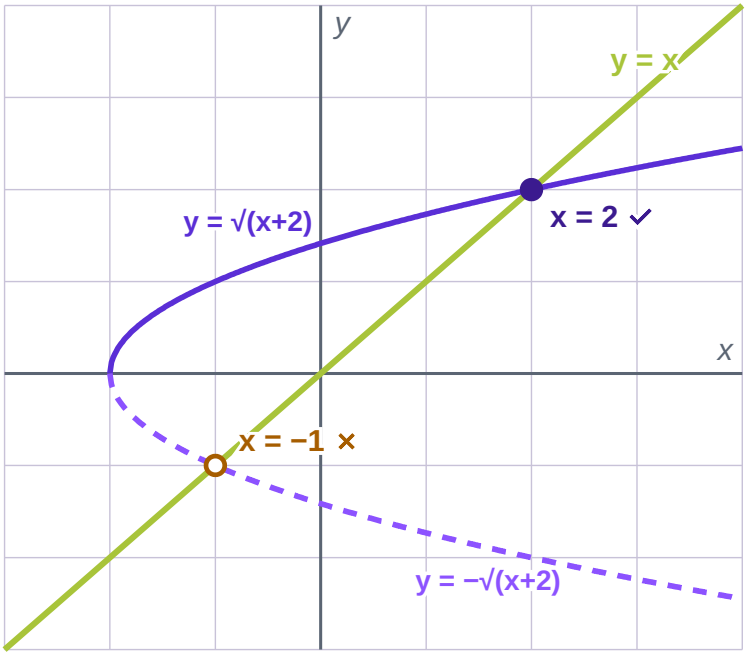
Para eliminar o radical, elevamos os dois membros ao quadrado. Ocorre que **elevar ao quadrado não é uma operação reversível**:

PROPRIEDADE

Se $a = b$, então $a^2 = b^2$. **Mas** se $a^2 = b^2$, então $a = b$ **ou** $a = -b$.

Exemplo numérico: a equação $x = 3$ tem uma única solução. Elevando ao quadrado obtemos $x^2 = 9$, que tem **duas** soluções: 3 e -3. O valor -3, que não satisfaz a equação original, é chamado de **raiz estranha**.

O mesmo ocorre em $\sqrt{x+2} = x$. Elevando ao quadrado: $x + 2 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -1$.



Ao elevar ao quadrado, a nova equação passa a incluir também a curva tracejada $y = -\sqrt{x+2}$. O ponto de abscissa $x = -1$ pertence a essa curva, e não à original.

Verificando: $x = 2 \Rightarrow \sqrt{4} = 2$ ✓. $x = -1 \Rightarrow \sqrt{1} = 1 \neq -1$ ×. Logo $S = \{2\}$.

ATENÇÃO

Em equações com radical de índice **par**, verifique cada valor encontrado na equação **original** (ou confira

a condição $B \geq 0$). Sem essa verificação, a resolução fica incompleta.

1.5 Roteiro de resolução

1. **Isole o radical** em um dos membros.
2. **Anote as condições** de existência ($A \geq 0$ e $B \geq 0$).
3. **Eleve ao quadrado** (ou ao cubo, se for raiz cúbica) cada membro por inteiro, e não termo a termo.
4. **Resolva** a equação obtida (geralmente do 1º ou 2º grau).
5. **Verifique** cada valor na equação original e escreva o conjunto solução.

1.6 Equações com dois radicais

Quando há dois radicais, não se eleva ao quadrado diretamente. Primeiro isola-se um deles, para que o quadrado produza apenas um radical:

PRODUTOS NOTÁVEIS ÚTEIS

$(m - \sqrt{A})^2 = m^2 - 2m\sqrt{A} + A \quad | \quad (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2 = A + 2\sqrt{AB} + B$

Depois da primeira elevação ao quadrado, ainda resta um radical: isole-o e eleve ao quadrado novamente.

1.7 Raízes de índice ímpar

Para $\sqrt[3]{A} = B$, elevamos ao **cubo**: $A = B^3$. Como o cubo preserva o sinal ($2^3 = 8$ e $(-2)^3 = -8$), **não surgem raízes estranhas** e não há restrição de sinal. Mesmo assim, verificar é um bom hábito.

Exemplo: $\sqrt[3]{x - 5} = -2 \Rightarrow x - 5 = -8 \Rightarrow x = -3$.

1.8 Troca de variável

Se a equação tem x e $\sqrt{x}$ (ou uma expressão e a raiz dela), chame a raiz de t:

$x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$. Fazendo $t = \sqrt{x}$ (com $t \geq 0$), temos $x = t^2$: $t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow t = 2$ ou $t = 3 \Rightarrow x = 4$ ou $x = 9$.

ERROS COMUNS

- Escrever $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, que é falso: $\sqrt{9 + 16} = 5$, mas $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$.
- Elevar ao quadrado termo a termo: $(x - 1)^2 \neq x^2 - 1$. O correto é $x^2 - 2x + 1$.
- Não verificar as soluções e incluir a raiz estranha na resposta.
- Na troca $t = \sqrt{x}$, aceitar t negativo.

DICA

Em questões de múltipla escolha, pode ser mais rápido testar as alternativas na equação original do que resolvê-la.

1.9 Quadro-resumo

Situação	O que fazer	Cuidado

$\sqrt{A} = B$	isolar e elevar ao quadrado: $A = B^2$	$A \geq 0, B \geq 0$; verificar
$\sqrt{A} =$ negativo	$S = \varnothing$ direto	—
$\sqrt{A} + \sqrt{B} = m$	isolar um radical e elevar ao quadrado; isolar o outro e elevar de novo	verificar no final
$\sqrt[3]{A} = B$	elevar ao cubo: $A = B^3$	não há raiz estranha
x e $\sqrt{x}$ juntos	$t = \sqrt{x}, t \geq 0$	descartar $t < 0$

2. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exercício resolvido 1. Resolva $\sqrt{x-3} = 4$.

Resolução:

1. O radical já está isolado e o 2º membro (4) é positivo.
2. Condição: $x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$.
3. Elevando ao quadrado: $(\sqrt{x-3})^2 = 4^2 \Rightarrow x - 3 = 16 \Rightarrow x = 19$.
4. Verificação: $\sqrt{19-3} = \sqrt{16} = 4$ ✓.

Resposta: $S = \{19\}$

Exercício resolvido 2. Resolva $\sqrt{3x+1} = x - 1$.

Resolução:

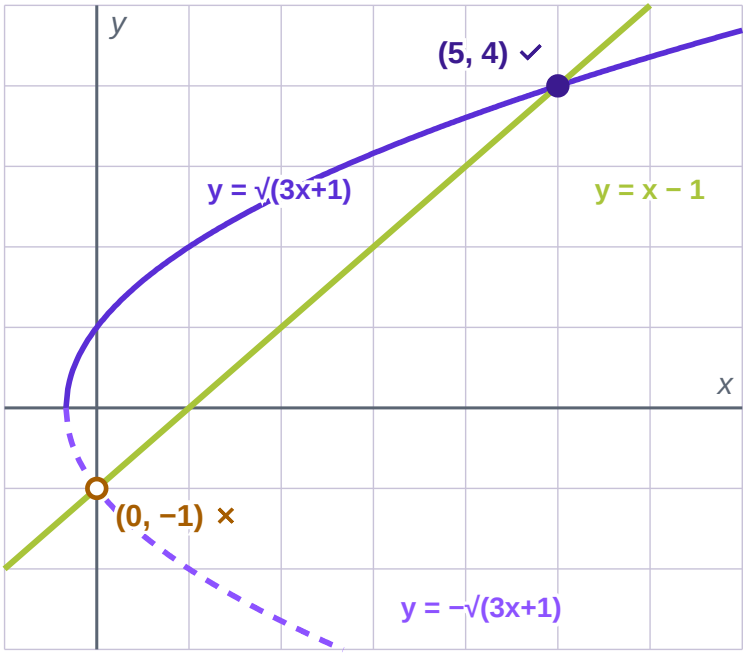
1. **Condições:** $3x + 1 \geq 0$ e $x - 1 \geq 0$. A mais forte é $x \geq 1$.
2. **Elevando ao quadrado** (atenção ao produto notável no 2º membro):

$$3x + 1 = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1.$$

3. **Organizando:** $x^2 - 2x + 1 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0$.
Logo $x = 0$ ou $x = 5$.
4. **Verificando** na equação original:

x	$\sqrt{3x+1}$	$x-1$	Confere?
0	$\sqrt{1} = 1$	-1	× (raiz estranha)
5	$\sqrt{16} = 4$	4	✓

O valor $x = 0$ já não satisfazia a condição $x \geq 1$.



A reta $y = x - 1$ encontra a curva $y = \sqrt{3x+1}$ só em $(5, 4)$. O ponto $(0, -1)$ pertence à curva $y = -\sqrt{3x+1}$, introduzida ao elevar ao quadrado.

Resposta: $S = \{5\}$

Exercício resolvido 3. Resolva $x - \sqrt{x+1} = 5$.

Resolução:

1. **Isolar o radical:** $-\sqrt{x+1} = 5 - x \Rightarrow \sqrt{x+1} = x - 5$.
2. **Condições:** $x + 1 \geq 0$ e $x - 5 \geq 0$, ou seja, $x \geq 5$.
3. **Quadrado:** $x + 1 = x^2 - 10x + 25 \Rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0$.
4. **Bhaskara:** $\Delta = 121 - 96 = 25 \Rightarrow x = \dfrac{11 \pm 5}{2} \Rightarrow x = 8$ ou $x = 3$.
5. **Verificação:** $x = 3$ não satisfaz $x \geq 5$ (descartado). Para $x = 8$: $8 - \sqrt{9} = 8 - 3 = 5$ ✓.

Resposta: $S = \{8\}$

Exercício resolvido 4. Resolva $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5$.

Resolução:

1. **Isolar um dos radicais:** $\sqrt{x+5} = 5 - \sqrt{x}$. (Condição: $x \geq 0$.)
2. **Elevando ao quadrado** (o 2º membro é um binômio):

$$x + 5 = 25 - 10\sqrt{x} + x.$$

3. **Simplificando:** o termo x se cancela: $5 = 25 - 10\sqrt{x} \Rightarrow 10\sqrt{x} = 20 \Rightarrow \sqrt{x} = 2$.
4. **Novo quadrado:** $x = 4$.
5. **Verificação:** $\sqrt{9} + \sqrt{4} = 3 + 2 = 5$ ✓.

Resposta: $S = \{4\}$

Exercício resolvido 5. Resolva $\sqrt[3]{x^2 - 9x + 28} = 2$.

Resolução:

1. Índice ímpar: **elevamos ao cubo** e não há condição de sinal.

$$x^2 - 9x + 28 = 2^3 = 8.$$

2. $x^2 - 9x + 20 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = 5$.
3. Verificação: $x = 4$: $16 - 36 + 28 = 8$, $\sqrt[3]{8} = 2$ ✓. $x = 5$: $25 - 45 + 28 = 8$ ✓.

Resposta: $S = \{4,\ 5\}$

Exercício resolvido 6. Resolva $x^2 + 3x + \sqrt{x^2 + 3x} = 6$.

Resolução:

Elevar ao quadrado diretamente levaria a uma equação do 4º grau. Como a expressão $x^2 + 3x$ aparece **duas vezes**, convém fazer uma troca de variável.

1. **Troca:** $t = \sqrt{x^2 + 3x}$, com $t \geq 0$. Então $t^2 = x^2 + 3x$ e a equação vira

$$t^2 + t - 6 = 0.$$

2. **Resolver em t:** $(t+3)(t-2) = 0 \Rightarrow t = 2$ ou $t = -3$. Como $t \geq 0$, só vale $t = 2$.
3. **Voltar para x:** $\sqrt{x^2 + 3x} = 2 \Rightarrow x^2 + 3x = 4 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -4$.
4. **Verificação:** $x = 1$: $1 + 3 + \sqrt{4} = 6$ ✓. $x = -4$: $16 - 12 + \sqrt{4} = 4 + 2 = 6$ ✓.

Resposta: $S = \{-4,\ 1\}$

Exercício resolvido 7 (nível concurso). Resolva $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = 2$.

Resolução:

1. **Condições:** $2x + 1 \geq 0$ e $x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$.
2. **Isolar:** $\sqrt{2x+1} = 2 + \sqrt{x-3}$ (agora os dois lados são positivos).
3. **1º quadrado:** $2x + 1 = 4 + 4\sqrt{x-3} + (x-3) \Rightarrow 2x + 1 = x + 1 + 4\sqrt{x-3}$.
4. **Isolar a raiz que sobrou:** $x = 4\sqrt{x-3}$.
5. **2º quadrado:** $x^2 = 16(x-3) \Rightarrow x^2 - 16x + 48 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{16 \pm \sqrt{256 - 192}}{2} = \dfrac{16 \pm 8}{2}$; logo, $x = 4$ ou $x = 12$.
6. **Verificação:**

x	$\sqrt{2x+1}$	$\sqrt{x-3}$	Diferença	
4	3	1	2	✓

12	5	3	2	✓

Neste caso, as duas soluções são válidas: a verificação também serve para **confirmar** soluções, e não apenas para descartá-las.

Resposta: $S = \{4,\ 12\}$

3. EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01 Resolva em $\mathbb{R}$:
a) $\sqrt{x-2} = 3$ b) $\sqrt{3x+1} = x-1$ c) $\sqrt{x+7} = x+1$ d) $\sqrt{x^2+9} = 5$

02 Explique, sem fazer contas, por que $\sqrt{2x+3} = -2$ não tem solução real.

03 Resolva $x + \sqrt{x-1} = 7$.

04 Resolva $\sqrt[3]{x^3-7} = x-1$.

05 Resolva $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 5$.

06 Resolva $2x - 3\sqrt{x} - 2 = 0$ usando troca de variável.

4. QUESTÕES DE CONCURSOS MILITARES

Questões oficiais de provas anteriores (EFOMM, EPCAR, EsPCEx, AFA e Escola Naval), selecionadas do banco de questões da Trilha Militares.

07 [EsPCEx 2023]

Dada a função real $f(x) = x^2 + 1$, a solução de $f(x) = f(2\sqrt{x}) + 5$ pertence ao conjunto:

(A) (−∞, −5]
(B) (−5, −1]
(C) (−1, 1]
(D) (1, 5]
(E) (5, +∞)

08 [EPCAR 2024]

Se p é a raiz da equação irracional $\sqrt{x^2+5x} = 14 - 2x$, então p pode ser o lado de um triângulo cujos outros lados medem

(A) 3,5 e 4
(B) 5 e 9
(C) 7 e 2,5
(D) 13 e 8,5

09 [EsPCEx 2024]

A soma dos números reais que satisfazem a equação $\sqrt{(x^2 - x - 1)^2} = 1$ é igual a:

(A) -2
(B) -1
(C) 0
(D) 1
(E) 2

5. GABARITO COMENTADO

Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.
07	D	08	A	09	E		

▼ 01 a 06 – Fixação

01. a) $x-2=9 \Rightarrow S=\{11\}$. b) $3x+1=x^2-2x+1 \Rightarrow x^2-5x=0 \Rightarrow x=0$ (×: $1\neq -1$) ou $x=5$ (✓: $4=4$) $\Rightarrow S=\{5\}$. c) $x+7=x^2+2x+1 \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow x=2$ (✓) ou $x=-3$ (×: $2\neq -2$) $\Rightarrow S=\{2\}$. d) $x^2+9=25 \Rightarrow x=\pm 4$, ambos ✓ $\Rightarrow S=\{-4,\,4\}$.

02. A raiz quadrada (real) de um número nunca é negativa, logo não pode ser igual a -2.

03. $\sqrt{x-1}=7-x \Rightarrow x-1=49-14x+x^2 \Rightarrow x^2-15x+50=0 \Rightarrow x=5$ ou $x=10$. Verificando: $5+2=7$ ✓; $10+3=13$ ×. $S=\{5\}$.

04. Ao cubo: $x^3-7=x^3-3x^2+3x-1 \Rightarrow 3x^2-3x-6=0 \Rightarrow x=2$ ou $x=-1$. Verificando: $\sqrt[3]{1}=1$ ✓; $\sqrt[3]{-8}=-2$ ✓. $S=\{-1,\,2\}$.

05. $\sqrt{x+4}=5-\sqrt{x-1} \Rightarrow x+4=25-10\sqrt{x-1}+x-1 \Rightarrow 10\sqrt{x-1}=20 \Rightarrow x=5$. Verificando: $3+2=5$ ✓. $S=\{5\}$.

06. $t=\sqrt{x}$: $2t^2-3t-2=0 \Rightarrow t=2$ ou $t=-\frac{1}{2}$ (descartado, pois $t\geq 0$) $\Rightarrow x=4$. $S=\{4\}$.

▼ 07 a 09 – Concursos militares

07 (D) · EsPCEx 2023.

$$x^2+1=4x+1+5 \;\Rightarrow\; x^2-4x-5=0 \;\Rightarrow\; x=5 \text{ ou } x=-1$$

Como $\sqrt{x}$ exige $x\geq 0$, a solução é $x=5\in(1,5]$.

08 (A) · EPCAR 2024.

Elevando ao quadrado: $x^2+5x=196-56x+4x^2$, ou $3x^2-61x+196=0$, com raízes $\frac{61\pm 37}{6}$: 4 e $\frac{49}{3}$.

É preciso $14-2x\geq 0$: só $p=4$ serve ($x=\frac{49}{3}$ é estranha, introduzida ao elevar ao quadrado).

Desigualdade triangular com 4: 4; 3,5; 4 forma triângulo. Os outros não: $4+5=9$, $4+2{,}5<7$ e $4+8{,}5<13$.

09 (E) · EsPCEx 2024.

$$|x^2-x-1|=1$$

$x^2-x-1=1$: $x^2-x-2=0$, $x=2$ ou $x=-1$. $x^2-x-1=-1$: $x^2-x=0$, $x=0$ ou $x=1$.

Soma: $2-1+0+1=2$.