PROF. LUIS TEIXEIRA
Física | Matemática

FICHA DE MATEMÁTICA

Equações

Biquadradas

Aluno(a): _____ | **Data:** ___/___/___ | **Prof.:** Luis Teixeira

1. TEORIA

DEFINIÇÃO

Equação biquadrada é toda equação da forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \qquad a \neq 0.$$

Só aparecem potências **pares** de x: x^4, x^2 e o termo independente (x^0). Não aparecem x^3 nem x.
São biquadradas: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, $2x^4 - x^2 = 0$, $x^4 - 16 = 0$. *Não é:* $x^4 - x^3 + 2 = 0$ (tem x^3).

1.1 Redução a uma equação do 2º grau

Como $x^4 = (x^2)^2$, fazendo $x^2 = y$ obtemos $x^4 = y^2$:

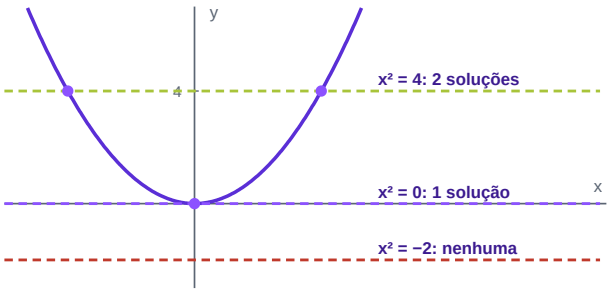
$$a\underbrace{x^4}_{y^2} + b\underbrace{x^2}_{y} + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad ay^2 + by + c = 0.$$

Com essa **troca de variável**, a biquadrada se transforma em uma equação do 2º grau em y, resolvida por Bhaskara ou por soma e produto. Em seguida, volta-se para x usando $x^2 = y$.

MÉTODO: TROCA DE VARIÁVEL

1. **Troca:** faça $y = x^2$ (logo $x^4 = y^2$) e escreva $ay^2 + by + c = 0$.
2. **Resolução em y:** encontre y_1 e y_2.
3. **Volta:** para cada valor de y, resolva $x^2 = y$.
   - $y > 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$ (duas raízes simétricas);
   - $y = 0 \Rightarrow x = 0$ (uma raiz);
   - $y < 0 \Rightarrow$ **nenhuma raiz real** (valor descartado).
4. **Resposta em x:** escreva o conjunto solução e, se possível, confira substituindo na equação original.

1.2 Descarte dos valores $y < 0$



O gráfico de x^2 nunca fica abaixo do eixo x.

Como $y = x^2$, na volta procuramos os números reais cujo quadrado é igual a y:

- $x^2 = 4$: tanto 2^2 quanto $(-2)^2$ dão 4 ⇒ **duas** soluções.
- $x^2 = 0$: só $x = 0$ ⇒ **uma** solução.
- $x^2 = -2$: **nenhuma** solução, pois o quadrado de um número real nunca é negativo.

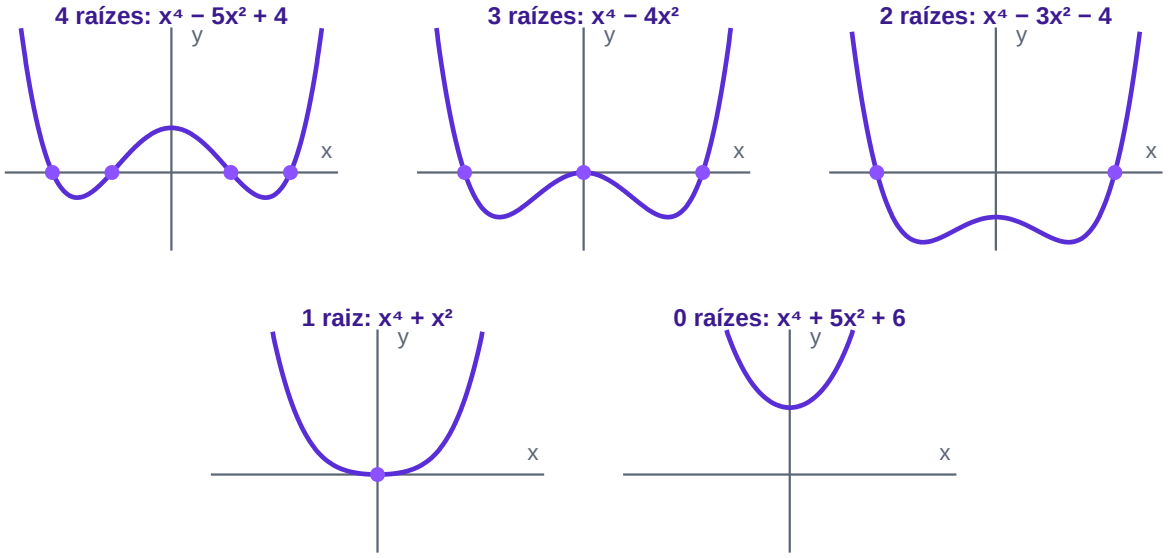
No gráfico, a reta horizontal correspondente a cada valor de y intersecta a parábola em 2, 1 ou 0 pontos.

ERROS COMUNS

- Responder com os valores de y e **esquecer de voltar** para x.
- Esquecer o sinal $\pm$: de $x^2 = 9$ saem $x = 3$ e $x = -3$.
- Tentar extrair a raiz quadrada de um y negativo (como $\sqrt{-4}$) em vez de descartá-lo.
- Dividir a equação por x^2 quando $c = 0$: isso **perde a raiz** $x = 0$. O certo é colocar x^2 em evidência.

1.3 Número de raízes reais e sinais de y_1 e y_2

Raízes em y	Raízes reais em x	Exemplo	Raízes
duas positivas distintas	**4**	$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$	$y = 1, 4 \Rightarrow \pm 1, \pm 2$
uma nula e uma positiva	**3**	$x^4 - 4x^2 = 0$	$y = 0, 4 \Rightarrow 0, \pm 2$
uma positiva e uma negativa	**2**	$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$	$y = 4, -1 \Rightarrow \pm 2$
positiva dupla	**2**	$x^4 - 4x^2 + 4 = 0$	$y = 2 \Rightarrow \pm\sqrt{2}$
uma nula e uma negativa	**1**	$x^4 + x^2 = 0$	$y = 0, -1 \Rightarrow 0$
ambas negativas ou $\Delta < 0$	**0**	$x^4 + 5x^2 + 6 = 0$	$y = -2, -3 \Rightarrow$ nenhuma



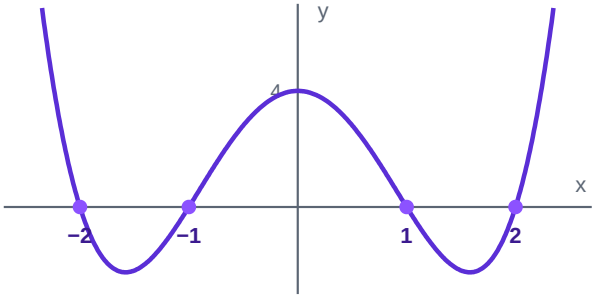
Gráficos de $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$: as raízes reais são os pontos onde o gráfico toca o eixo x. Os gráficos são simétricos em relação ao eixo y.

DICA: SINAIS DE Y_1 E Y_2 SEM RESOLVER A EQUAÇÃO

Use soma e produto da equação em y: $y_1 + y_2 = -\dfrac{b}{a}$ e $y_1 \cdot y_2 = \dfrac{c}{a}$.

- Produto **negativo** ⇒ uma positiva e uma negativa ⇒ exatamente **2** raízes reais.
- Produto positivo e soma positiva (com $\Delta > 0$) ⇒ duas positivas ⇒ **4** raízes reais.
- Produto positivo e soma negativa ⇒ duas negativas ⇒ **0** raízes reais.

1.4 Propriedades das raízes



$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$: raízes $-2, -1, 1, 2$, simétricas.

- **Simetria:** se r é raiz, $-r$ também é, pois $(-r)^4 = r^4$ e $(-r)^2 = r^2$. Por isso a **soma das raízes reais é sempre zero**.
- **Produto** (com as 4 raízes reais $\pm\sqrt{y_1}$, $\pm\sqrt{y_2}$): $(\sqrt{y_1})(-\sqrt{y_1})(\sqrt{y_2})(-\sqrt{y_2}) = y_1 y_2 = \dfrac{c}{a}$.
- **Soma dos quadrados** das 4 raízes: $2y_1 + 2y_2 = -\dfrac{2b}{a}$.

Exemplo: em $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, o produto é $\frac{4}{1} = 4$ (confira: $(-2)(-1)(1)(2) = 4$) e a soma dos quadrados é $2 \cdot 5 = 10$ ($4 + 1 + 1 + 4$).

1.5 Montando a biquadrada a partir das raízes

FÓRMULA

Se as raízes são $\pm r$ e $\pm s$, então cada par vem de um fator $(x^2 - r^2)$:

$$(x^2 - r^2)(x^2 - s^2) = 0 \iff x^4 - (r^2 + s^2)\,x^2 + r^2 s^2 = 0.$$

Exemplo: raízes ± 1 e ± 3 ⇒ $(x^2 - 1)(x^2 - 9) = x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

1.6 Outras equações resolvidas por troca de variável

A troca de variável se aplica sempre que uma **mesma expressão** aparece duas vezes, uma elevada ao quadrado e outra à primeira potência. Exemplo: $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$. Fazendo $y = x^2 - x$, obtemos $y^2 - 8y + 12 = 0$. Na volta, porém, cada valor de y gera uma **nova equação do 2º grau** em x (veja o Exercício resolvido 5).

> **DICA**
>
> Nessas equações, um valor $y < 0$ **não** é descartado automaticamente na volta: só se descarta quando a equação de volta não tem raízes reais ($\Delta < 0$). Por exemplo, $x^2 - x = -2$ não tem raiz real, mas $x^2 - x = -\frac{1}{8}$ tem.

1.7 Quadro-resumo

Etapa	O que fazer
Reconhecer	só x^4, x^2 e número (expoentes pares)
Trocar	$y = x^2 \Rightarrow ay^2 + by + c = 0$
Resolver em y	Bhaskara ou soma e produto
Voltar	$x^2 = y$: $y > 0 \Rightarrow \pm\sqrt{y}$; $y = 0 \Rightarrow 0$; $y < 0 \Rightarrow$ descarta
Propriedades	soma das raízes $= 0$; produto (4 raízes) $= \frac{c}{a}$; soma dos quadrados $= -\frac{2b}{a}$
Montar	raízes $\pm r, \pm s \Rightarrow (x^2 - r^2)(x^2 - s^2) = 0$

2. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exercício resolvido 1. Resolva $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Resolução:

1. **Troca:** $y = x^2 \Rightarrow y^2 - 13y + 36 = 0$.
2. **Resolver em** y por soma e produto: procuramos dois números com soma 13 e produto $36 \Rightarrow 4$ e 9. Então $y_1 = 4$ e $y_2 = 9$.
3. **Volta** (os dois são positivos, nenhum é descartado): $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$; $\quad x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$.
4. **Conferir** uma raiz: $x = 3$: $81 - 13 \cdot 9 + 36 = 81 - 117 + 36 = 0$ ✓.

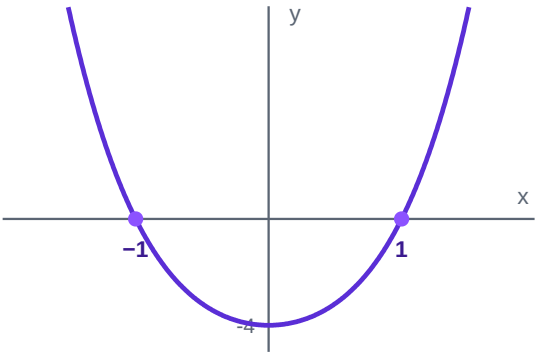
em x		em y		volta para x
$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$	$\xrightarrow{y = x^2}$	$y = 4$	→	$x = \pm 2$
		$y = 9$	→	$x = \pm 3$

Resposta: $S = \{-3, -2, 2, 3\}$

Exercício resolvido 2. Resolva, em $\mathbb{R}$, $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$.

Resolução:

1. **Troca:** $y^2 + 3y - 4 = 0$.
2. **Bhaskara:** $\Delta = 9 + 16 = 25 \Rightarrow y = \dfrac{-3 \pm 5}{2}$ $\Rightarrow y_1 = 1$ ou $y_2 = -4$.
3. **Volta:** $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.
   $x^2 = -4 \Rightarrow$ **sem solução real** (nenhum quadrado é negativo); valor descartado.
4. **Interpretação gráfica:** o gráfico ao lado intersecta o eixo x apenas em -1 e 1.



Resposta: $S = \{-1, 1\}$

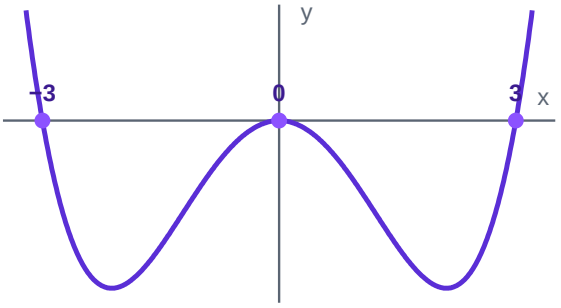
Exercício resolvido 3. Resolva $x^4 - 9x^2 = 0$.

Resolução:

1. **Atenção:** $c = 0$. Não se deve dividir por x^2, pois a raiz $x = 0$ seria perdida. Coloque x^2 em evidência:

$$x^2(x^2 - 9) = 0.$$

2. **Anulamento do produto:** $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$; ou $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$.
3. **Pela troca** (outro caminho): $y^2 - 9y = 0 \Rightarrow$ $y = 0$ ou $y = 9 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pm 3$. Mesmo resultado.
4. São **3 raízes** distintas (caso de uma raiz nula e uma positiva, na tabela do item 1.3).



Resposta: $S = \{-3, 0, 3\}$

Exercício resolvido 4. Resolva $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$.

Resolução:

1. **Troca:** $4y^2 - 37y + 9 = 0$ (com $a = 4$, a fórmula de Bhaskara é mais prática que soma e produto).
2. $\Delta = (-37)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 1369 - 144 = 1225 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 35$.
3. $y = \dfrac{37 \pm 35}{8} \Rightarrow y_1 = \dfrac{72}{8} = 9$ ou $y_2 = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$.
4. **Volta:** $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$; $\ x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$.
5. **Conferir pelo produto:** $3 \cdot (-3) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} = \frac{c}{a}$ ✓.

Resposta: $S = \left\{-3,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 3\right\}$

Exercício resolvido 5. Resolva $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$.

Resolução:

1. **Identificar a expressão repetida:** $x^2 - x$. Troca: $y = x^2 - x \Rightarrow y^2 - 8y + 12 = 0$.
2. **Em** y (soma 8, produto 12): $y_1 = 2$ ou $y_2 = 6$.
3. **Volta com** $y = 2$: $x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$ (soma 1, produto -2) $\Rightarrow x = 2$ ou $x = -1$.
4. **Volta com** $y = 6$: $x^2 - x = 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow$ (soma 1, produto -6) $\Rightarrow x = 3$ ou $x = -2$.
5. **Conferir** $x = 3$: $x^2 - x = 6 \Rightarrow 36 - 48 + 12 = 0$ ✓.

Resposta: $S = \{-2,\ -1,\ 2,\ 3\}$

Exercício resolvido 6. Escreva a equação biquadrada (com $a = 1$) cujas raízes são ± 1 e $\pm\sqrt{3}$.

Resolução:

1. O par ± 1 vem de $x^2 = 1$, ou seja, do fator $(x^2 - 1)$.
2. Do mesmo modo, o par $\pm\sqrt{3}$ vem de $x^2 = 3$, isto é, do fator $(x^2 - 3)$.
3. **Multiplicar:** $(x^2 - 1)(x^2 - 3) = x^4 - 3x^2 - x^2 + 3 = x^4 - 4x^2 + 3$.
4. **Conferir** pela troca: $y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = 3 \Rightarrow x = \pm 1, \pm\sqrt{3}$ ✓.

Resposta: $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

Exercício resolvido 7. [Nível concurso] Sem resolver a equação $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$, que tem quatro raízes reais, calcule: (a) a soma das raízes; (b) o produto das raízes; (c) a soma dos quadrados das raízes.

Resolução:

1. Na equação em y: $y^2 - 10y + 9 = 0$, temos $y_1 + y_2 = 10$ e $y_1 y_2 = 9$.
2. **(a)** As raízes vêm em pares r e $-r$ ⇒ a soma é 0.
3. **(b)** Produto $= (\sqrt{y_1})(-\sqrt{y_1})(\sqrt{y_2})(-\sqrt{y_2}) = y_1 y_2 = 9$.
4. **(c)** Cada y aparece duas vezes como quadrado ($r^2 = (-r)^2 = y$) ⇒ soma dos quadrados $= 2(y_1 + y_2) = 20$.
5. **Conferência** (resolvendo): $y = 1$ ou 9 ⇒ raízes $\pm 1, \pm 3$; produto $1 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot (-3) = 9$ ✓; quadrados $1 + 1 + 9 + 9 = 20$ ✓.

Resposta: (a) 0 (b) 9 (c) 20

Exercício resolvido 8. [Nível concurso] Para quais valores reais de k a equação $x^4 - 6x^2 + k = 0$ possui **exatamente duas** raízes reais distintas?

Resolução:

1. **Troca:** $y^2 - 6y + k = 0$. Pela tabela do item 1.3, há exatamente 2 raízes em x em dois casos: (I) uma raiz y positiva e outra negativa; (II) uma raiz y positiva **dupla**.
2. **Caso (I):** sinais opostos ⇔ produto negativo: $y_1 y_2 = k < 0$. (Se o produto é negativo, Δ é automaticamente positivo.)
3. **Caso (II):** raiz dupla ⇔ $\Delta = 0$: $36 - 4k = 0 \Rightarrow k = 9$. A raiz dupla é $y = 3 > 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$ ✓.
4. **Demais casos:** $k = 0$ dá $y = 0$ ou 6 ⇒ 3 raízes; $0 < k < 9$ dá duas y positivas ⇒ 4 raízes; $k > 9$ dá $\Delta < 0$ ⇒ nenhuma raiz.

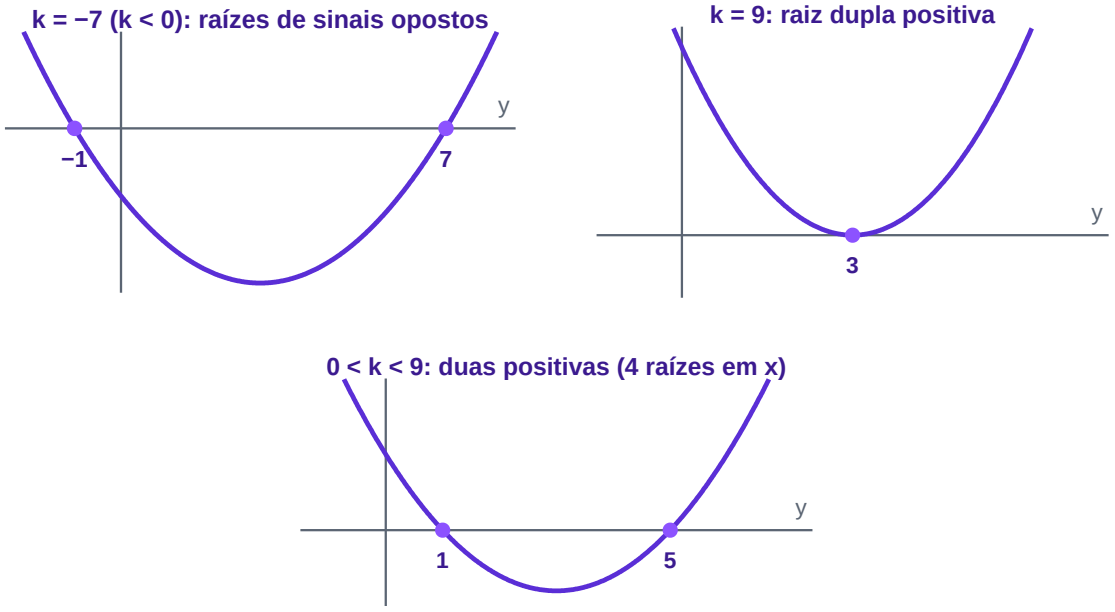


Gráfico de $g(y) = y^2 - 6y + k$ em cada caso. Só as raízes $y \geq 0$ geram raízes em x.

Resposta: $k < 0$ ou $k = 9$

3. EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01 Resolva em $\mathbb{R}$:
a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ b) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ c) $x^4 - 16 = 0$ d) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$ e) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$

02 Resolva $x^4 - x^2 - 12 = 0$ e justifique por que uma das soluções em y foi descartada.

03 Resolva $x^2(x^2 - 7) = -12$.

04 Escreva a equação biquadrada (com $a = 1$) cujas raízes são $\pm\sqrt{2}$ e ± 3.

05 Resolva $(x^2 + 1)^2 - 7(x^2 + 1) + 10 = 0$.

06 Sabendo que 2 é raiz de $x^4 - 2x^2 + m = 0$, determine m e as demais raízes reais.

4. QUESTÕES ESTILO CONCURSO

07 O número de raízes reais da equação $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ é:

(A) 0
(B) 1
(C) 3
(D) 4
(E) 2

08 A soma dos quadrados das raízes reais de $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ é:

(A) 13
(B) 0
(C) 36
(D) 26
(E) 52

09 O produto das raízes reais de $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ é:

(A) 4
(B) -4
(C) 0
(D) 5
(E) -5

10 A maior raiz real da equação $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ é:

(A) $\frac{1}{3}$
(B) 1
(C) 3
(D) 9
(E) $\frac{1}{9}$

11 Quantas raízes reais distintas possui a equação $x^4 - 9x^2 = 0$?

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 0

12 O produto das raízes **positivas** de $(x^2 - 3)^2 - 4(x^2 - 3) - 5 = 0$ é:

(A) 2
(B) 8
(C) 16
(D) 4
(E) $2\sqrt{2}$

13 [Desafio] A equação $x^4 - 10x^2 + m = 0$ possui quatro raízes reais e distintas se, e somente se:

(A) $m < 25$
(B) $m > 0$
(C) $0 \leq m < 25$
(D) $m > 25$
(E) $0 < m < 25$

Questões de concursos militares

Questões oficiais de provas anteriores, selecionadas do banco de questões da Trilha Militares.

14 [EsPCEx 2016]

Os gráficos de $f(x) = 2$ e $g(x) = x^2 - |x|$ têm dois pontos em comum. O valor da soma das abscissas dos pontos em comum é igual a

(A) 0
(B) 4
(C) 8
(D) 10
(E) 15

5. GABARITO COMENTADO

Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.
07	E	08	D	09	A	10	B
11	C	12	D	13	E		

Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.
14	A						

▼ 01 a 06 – Fixação

01. a) $y = 1$ ou $4 \Rightarrow S = \{\pm 1, \pm 2\}$. b) $y = 1$ ou $9 \Rightarrow S = \{\pm 1, \pm 3\}$. c) $y^2 = 16 \Rightarrow y = 4$ ou $y = -4$ (descartado) $\Rightarrow S = \{\pm 2\}$. d) $4y^2 - 17y + 4 = 0 \Rightarrow y = 4$ ou $y = \frac{1}{4} \Rightarrow S = \{\pm 2, \pm \frac{1}{2}\}$. e) $y = -2$ ou $y = -3$, ambos negativos $\Rightarrow S = \varnothing$.

02. $y^2 - y - 12 = 0 \Rightarrow y = 4$ ou $y = -3$. $y = -3$ é descartado pois $x^2 \geq 0$. $S = \{-2, 2\}$.

03. $x^4 - 7x^2 + 12 = 0 \Rightarrow y = 3$ ou $y = 4 \Rightarrow S = \{\pm\sqrt{3}, \pm 2\}$.

04. $(x^2 - 2)(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x^4 - 11x^2 + 18 = 0$.

05. $y = x^2 + 1$: $y^2 - 7y + 10 = 0 \Rightarrow y = 2$ ou $y = 5 \Rightarrow x^2 = 1$ ou $x^2 = 4 \Rightarrow S = \{\pm 1, \pm 2\}$.

06. $16 - 8 + m = 0 \Rightarrow m = -8$. $x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow y = 4$ ou $y = -2$ (descartado) $\Rightarrow$ a outra raiz real é -2.

▼ 07 a 13 – Estilo concurso

07 (E). $y = 4$ ou $y = -1$ (descartado) $\Rightarrow x = \pm 2$: duas raízes reais.

08 (D). Raízes ± 2 e ± 3: $4 + 4 + 9 + 9 = 26$ (ou $2(y_1 + y_2) = 2 \cdot 13$).

09 (A). $1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-2) = 4 = \frac{c}{a}$.

10 (B). $9y^2 - 10y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = \frac{1}{9} \Rightarrow$ raízes ± 1 e $\pm \frac{1}{3}$; a maior é 1.

11 (C). $x^2(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = 3$ ou $x = -3$.

12 (D). $y = x^2 - 3$: $y^2 - 4y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5$ ou $y = -1 \Rightarrow x^2 = 8$ ou $x^2 = 2$. Positivas: $2\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$; produto $= 4$.

13 (E). Precisamos de duas raízes y **positivas e distintas** em $y^2 - 10y + m = 0$: $\Delta = 100 - 4m > 0 \Rightarrow m < 25$; produto $m > 0$; soma $10 > 0$ (condição satisfeita). Logo $0 < m < 25$. (Se $m = 0$, há só 3 raízes; se $m = 25$, só 2.)

▼ 14 a 14 – Concursos militares

14 (A) · EsPCEx 2016.

$$|x|^2 - |x| - 2 = 0 \;\Rightarrow\; |x| = 2 \;(\text{ou } |x| = -1, \text{ impossível})$$

$x = 2$ ou $x = -2$: soma 0 (a função g é par, as abscissas são simétricas).