PROF. LUIS TEIXEIRA
Física | Matemática

FICHA DE MATEMÁTICA

Equações

Soma e produto das raízes

Aluno(a): _____ | **Data:** ___/___/___ | **Prof.:** Luis Teixeira

1. TEORIA

NOTAÇÃO

Seja a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) com raízes x_1 e x_2. Indicamos

$$S = x_1 + x_2 \quad (\text{soma}) \qquad\qquad P = x_1 \cdot x_2 \quad (\text{produto}).$$

S e P podem ser obtidos **diretamente dos coeficientes**, sem resolver a equação.

1.1 Observação inicial

A equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ tem raízes 2 e 3, com $2 + 3 = 5$ e $2 \cdot 3 = 6$, números que figuram nos coeficientes da equação. Da mesma forma, $x^2 - 7x + 10 = 0$ tem raízes 2 e 5, com soma 7 e produto 10. Essa relação vale em geral, como se mostra a seguir.

1.2 Dedução a partir de Bhaskara

As raízes são $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Soma: os termos com $\sqrt{\Delta}$ se cancelam:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Produto: usamos $(m+n)(m-n) = m^2 - n^2$:

$$x_1 x_2 = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

RELAÇÕES DE SOMA E PRODUTO (GIRARD)

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad\qquad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

No caso $a = 1$, a equação fica $x^2 - Sx + P = 0$, isto é, $b = -S$ e $c = P$.

ERROS COMUNS

- **Esquecer o sinal de menos** na soma: em $x^2 - 5x + 6 = 0$, $S = -\frac{-5}{1} = 5$ (e não -5). Já em $x^2 + 5x + 6 = 0$, $S = -5$.
- **Esquecer de dividir por** a: em $2x^2 - 6x - 8 = 0$, $S = \frac{6}{2} = 3$ e $P = \frac{-8}{2} = -4$ (e não 6 e -8).
- **Equação fora da forma geral**: em $x^2 = 3x + 4$, escreva antes a forma geral: $x^2 - 3x - 4 = 0$.
- $\Delta < 0$: em $x^2 + x + 1 = 0$, as fórmulas fornecem $S = -1$ e $P = 1$, mas a equação não tem raízes reais. Quando a questão trata de raízes reais, verifique se $\Delta \geq 0$.

1.3 Cálculo mental das raízes

Quando $a = 1$ e as raízes são inteiras, procure **dois números cujo produto é P e cuja soma é S**. Comece pelo produto, que admite menos possibilidades, e use a tabela de sinais:

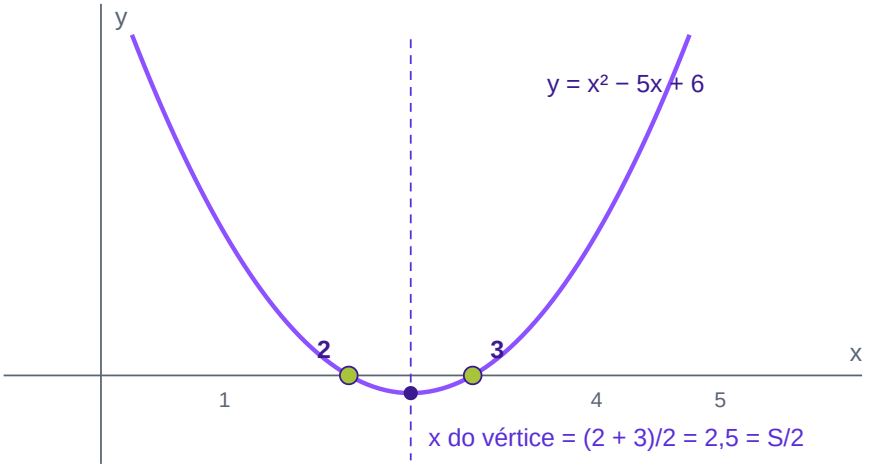
Sinal de P	Sinal de S	Conclusão sobre as raízes
$P > 0$	$S > 0$	ambas **positivas**
$P > 0$	$S < 0$	ambas **negativas**
$P < 0$	$S > 0$	sinais opostos; a de **maior módulo é positiva**
$P < 0$	$S < 0$	sinais opostos; a de **maior módulo é negativa**

Exemplo: $x^2 + x - 12 = 0$: $S = -1$, $P = -12$. Pares com produto 12: $(1, 12), (2, 6), (3, 4)$. Sinais opostos com soma -1: 3 e -4 ✓.

> **DICA**
>
> Se o par não aparecer após poucas tentativas, use a fórmula de Bhaskara: as raízes podem não ser inteiras (por exemplo, em $x^2 - 5x + 3 = 0$).

1.4 Interpretação no gráfico

As raízes são simétricas em relação ao eixo da parábola. Por isso a **média das raízes** é o x do vértice: $x_V = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{S}{2} = -\dfrac{b}{2a}$.



$y = x^2 - 5x + 6$: raízes 2 e 3 ($S = 5$, $P = 6$); o eixo de simetria passa por $x = \frac{S}{2} = 2{,}5$.

1.5 Montando a equação a partir das raízes

Se queremos uma equação com raízes x_1 e x_2, calculamos S e P e escrevemos

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Qualquer múltiplo dela ($k \cdot (x^2 - Sx + P) = 0$, $k \neq 0$) tem as mesmas raízes, o que permite eliminar frações.

Exemplo: raízes $\frac{1}{2}$ e 3: $S = \frac{7}{2}$, $P = \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow$ (× 2) $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

1.6 Forma fatorada

FATORAÇÃO DO TRINÔMIO

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Justificativa: desenvolvendo, $a(x - x_1)(x - x_2) = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right] = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = ax^2 + bx + c$ ✓.

Exemplo: $x^2 - x - 20$ tem raízes 5 e $-4 \Rightarrow x^2 - x - 20 = (x - 5)(x + 4)$. Essa forma é usada na simplificação de frações algébricas.

1.7 Expressões envolvendo as raízes

Muitas questões pedem o valor de uma expressão em x_1 e x_2. Nesses casos, reescreve-se a expressão **em função de** S **e** P, sem calcular as raízes:

Expressão	Em função de S e P	Justificativa
$x_1^2 + x_2^2$	$S^2 - 2P$	$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$
$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$	$\frac{S}{P}$	somar frações: $\frac{x_2 + x_1}{x_1x_2}$
$(x_1 - x_2)^2$	$S^2 - 4P$	$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$
$x_1^2x_2 + x_1x_2^2$	$P \cdot S$	colocar x_1x_2 em evidência
$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$	$\frac{S^2 - 2P}{P}$	MMC: $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2}$
$x_1^3 + x_2^3$	$S^3 - 3PS$	$(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2)$

1.8 Problemas com parâmetro: traduzindo a condição

Condição do enunciado	Como traduzir
raízes **simétricas** (r e $-r$)	$S = 0 \Rightarrow b = 0$ (e $\Delta > 0$)
raízes **inversas** (r e $\frac{1}{r}$)	$P = 1 \Rightarrow c = a$
uma raiz **nula**	$P = 0 \Rightarrow c = 0$
raízes de **sinais opostos**	$P < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0$
uma raiz é o **dobro** (triplo etc.) da outra	chame as raízes de r e $2r$; use S e P
uma raiz é **conhecida**	substitua na equação (ou use S para achar a outra)

1.9 Quadro-resumo

RESUMO

- $S = -\frac{b}{a}$ · $P = \frac{c}{a}$ · equação a partir das raízes: $x^2 - Sx + P = 0$.
- Fatorada: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$ · $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{S}{P}$ · $(x_1 - x_2)^2 = S^2 - 4P$.
- Simétricas: $b = 0$ · Inversas: $c = a$ · Uma nula: $c = 0$ · Sinais opostos: $\frac{c}{a} < 0$.

2. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exercício resolvido 1. Sem resolver a equação $2x^2 - 6x - 8 = 0$, calcule a soma e o produto das raízes. Depois confira resolvendo.

Resolução:

1. **Coeficientes:** $a = 2$, $b = -6$, $c = -8$.
2. **Soma:** $S = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-6}{2} = 3$.
3. **Produto:** $P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-8}{2} = -4$.
4. **Conferindo:** dividindo por 2, $x^2 - 3x - 4 = 0$ ⇒ raízes 4 e -1. Soma $4 + (-1) = 3$ ✓, produto $4 \cdot (-1) = -4$ ✓.

Resposta: $S = 3$ e $P = -4$

Exercício resolvido 2. Resolva mentalmente, usando soma e produto: a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $x^2 + x - 12 = 0$.

Resolução:

1. **a)** $S = 7$, $P = 10$. Como $P > 0$ e $S > 0$, as duas raízes são positivas. Pares de produto 10: $(1, 10)$ soma 11; $(2, 5)$ soma **7** ✓.
2. **b)** $S = -1$, $P = -12$. $P < 0$ ⇒ sinais opostos; $S < 0$ ⇒ a de maior módulo é negativa.
3. Pares de produto 12; com sinais opostos, a soma passa a ser a diferença entre eles:

par	com sinais opostos	soma
1 e 12	1 e -12	-11
2 e 6	2 e -6	-4
3 e 4	3 e -4	$\mathbf{-1}$ ✓

Resposta: a) $S = \{2,\ 5\}$ **b)** $S = \{-4,\ 3\}$

Exercício resolvido 3. Escreva uma equação do 2º grau, com coeficientes inteiros, cujas raízes sejam: a) 3 e -5 b) $\frac{1}{2}$ e 3.

Resolução:

1. **a)** $S = 3 + (-5) = -2$; $P = 3 \cdot (-5) = -15$.
2. $x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - (-2)x + (-15) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$.
3. **b)** $S = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$; $P = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0$.
4. Multiplicando por 2 (as raízes não mudam): $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Resposta: a) $x^2 + 2x - 15 = 0$ **b)** $2x^2 - 7x + 3 = 0$

Exercício resolvido 4. Fatore $2x^2 - 7x + 3$ e use o resultado para simplificar $\dfrac{2x^2 - 7x + 3}{x - 3}$ (com $x \neq 3$).

Resolução:

1. **Raízes** (do exercício anterior): 3 e $\frac{1}{2}$; e $a = 2$.
2. **Forma fatorada:** $2x^2 - 7x + 3 = 2(x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x - 3)(2x - 1)$ (o fator 2 foi multiplicado pelo último parêntese).
3. **Simplificar:** $\dfrac{(x - 3)(2x - 1)}{x - 3} = 2x - 1$.

Resposta: $(x - 3)(2x - 1)$**; a fração vale** $2x - 1$

Exercício resolvido 5. Sendo x_1 e x_2 as raízes de $x^2 - 5x + 3 = 0$, calcule, sem achar as raízes: a) $x_1^2 + x_2^2$ b) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ c) $(x_1 - x_2)^2$.

Resolução:

1. **Primeiro S e P:** $S = 5$, $P = 3$ (e $\Delta = 25 - 12 = 13 > 0$, as raízes são reais).
2. **a)** Do quadrado da soma: $S^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2P \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = 25 - 6 = 19$.
3. **b)** $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \dfrac{S}{P} = \dfrac{5}{3}$.
4. **c)** $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = S^2 - 4P = 25 - 12 = 13$. (Esse valor coincide com Δ, pois $a = 1$.)

Resposta: a) 19 **b)** $\frac{5}{3}$ **c)** 13

Exercício resolvido 6. Determine k para que uma das raízes de $x^2 - 9x + k = 0$ seja o dobro da outra.

Resolução:

1. **Nomear as raízes:** r e $2r$.
2. **Soma:** $r + 2r = 9 \Rightarrow 3r = 9 \Rightarrow r = 3$. As raízes são 3 e 6.
3. **Produto:** $k = P = 3 \cdot 6 = 18$.
4. **Conferir:** $x^2 - 9x + 18 = 0$ tem raízes 3 e 6, e $6 = 2 \cdot 3$ ✓.

Resposta: $k = 18$

Exercício resolvido 7. a) Determine m para que $x^2 + (m-3)x - 4 = 0$ tenha raízes simétricas. b) Determine m para que $3x^2 - 10x + (m+1) = 0$ tenha raízes inversas.

Resolução:

1. **a)** Simétricas (r e $-r$) $\Rightarrow S = 0 \Rightarrow -\dfrac{m-3}{1} = 0 \Rightarrow m = 3$.
2. Conferindo: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$ ✓ (são reais e simétricas).
3. **b)** Inversas (r e $\frac{1}{r}$) $\Rightarrow P = r \cdot \frac{1}{r} = 1 \Rightarrow \dfrac{m+1}{3} = 1 \Rightarrow m = 2$.
4. Conferindo: $3x^2 - 10x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 100 - 36 = 64 \Rightarrow x = \frac{10 \pm 8}{6} \Rightarrow 3$ e $\frac{1}{3}$ ✓.

Resposta: a) $m = 3$ **b)** $m = 2$

Exercício resolvido 8. (Nível concurso) Sendo x_1 e x_2 as raízes de $x^2 - 4x + 1 = 0$, calcule $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$ e $x_1^3 + x_2^3$.

Resolução:

1. $S = 4$, $P = 1$ ($\Delta = 12 > 0$).
2. **MMC:** $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \dfrac{S^2 - 2P}{P} = \dfrac{16 - 2}{1} = 14$.
3. **Cubo da soma:** $(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 + x_2^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$.
4. Logo $x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS = 64 - 3 \cdot 1 \cdot 4 = 52$.

Resposta: 14 e 52

3. EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01 Calcule a soma e o produto das raízes, sem resolver:
a) $x^2 - 8x + 15 = 0$ b) $3x^2 + 6x - 9 = 0$ c) $x^2 - 49 = 0$ d) $2x^2 - 5x = 0$

02 Resolva mentalmente, usando soma e produto:
a) $x^2 - 9x + 20 = 0$ b) $x^2 + 8x + 12 = 0$ c) $x^2 - 2x - 24 = 0$ d) $x^2 + 5x - 14 = 0$

03 Escreva uma equação do 2º grau com coeficientes inteiros cujas raízes sejam:
a) 4 e 6 b) -2 e 7 c) $\frac{2}{3}$ e -1

04 Fatore: a) $x^2 - x - 20$ b) $3x^2 - 5x - 2$

05 Sendo x_1 e x_2 as raízes de $x^2 - 6x + 4 = 0$, calcule $x_1^2 + x_2^2$ e $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$.

06 Determine k para que a equação $x^2 - kx + 12 = 0$ tenha raízes **positivas**, sendo uma o triplo da outra.

4. QUESTÕES DE CONCURSOS MILITARES

Questões oficiais de provas anteriores (EFOMM, EPCAR, EsPCEx, AFA e Escola Naval), selecionadas do banco de questões da Trilha Militares.

07 [EPCAR 2023]

Considere que x_1 e x_2 são as raízes da equação do segundo grau $(m-2)x^2 + (m-10)x = -16 + 2m$, na incógnita x, com $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 2$ e $x_1 + x_2 = 7$

Seja B o valor da expressão

$$B = \frac{\left[m^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^3\right] : \left[\frac{m \cdot 5}{(2^2)^m}\right]}{\sqrt[m]{\left[\frac{20m + \sqrt{16}}{(m^7 - m)^0}\right]^{-1}}}$$

O número B

(A) é primo.
(B) é irracional.
(C) é quadrado perfeito.
(D) tem 12 divisores naturais.

08 [EFOMM 2023]

Sejam p e q as raízes da equação $x^2 - 2x + k = 0$, em que k é um número real diferente de zero. Se

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} = 6,$$

então o produto dos possíveis valores de k é

(A) -1
(B) $-\dfrac{2}{3}$
(C) $\dfrac{1}{3}$
(D) $\dfrac{2}{3}$
(E) $\dfrac{3}{2}$

09 [EFOMM 2022]

Sejam p e q as raízes da equação $5x^2 + 2x - 1 = 0$. O valor de $p^{-5} + q^{-5}$ é

(A) 480
(B) 481
(C) 482
(D) 483
(E) 484

5. GABARITO COMENTADO

Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.
07	D	08	B	09	C		

▼ 01 a 06 – Fixação

01. a) $S = 8$, $P = 15$. b) $S = -\frac{6}{3} = -2$, $P = \frac{-9}{3} = -3$. c) $b = 0 \Rightarrow S = 0$, $P = -49$ (raízes ± 7). d) $c = 0 \Rightarrow S = \frac{5}{2}$, $P = 0$ (raízes 0 e $\frac{5}{2}$).

02. a) $S = 9$, $P = 20 \Rightarrow 4$ e 5. b) $S = -8$, $P = 12 \Rightarrow$ ambas negativas $\Rightarrow -2$ e -6. c) $S = 2$, $P = -24 \Rightarrow 6$ e -4. d) $S = -5$, $P = -14 \Rightarrow 2$ e -7.

03. a) $S = 10$, $P = 24 \Rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0$. b) $S = 5$, $P = -14 \Rightarrow x^2 - 5x - 14 = 0$. c) $S = -\frac{1}{3}$, $P = -\frac{2}{3} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow (\times 3)\ 3x^2 + x - 2 = 0$.

04. a) Raízes 5 e $-4 \Rightarrow (x-5)(x+4)$. b) $\Delta = 25 + 24 = 49 \Rightarrow$ raízes 2 e $-\frac{1}{3} \Rightarrow 3(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right) = (x-2)(3x+1)$.

05. $S = 6$, $P = 4$. $x_1^2 + x_2^2 = 36 - 8 = 28$; $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

06. Raízes r e $3r$: $P = 3r^2 = 12 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$ (positiva). Raízes 2 e $6 \Rightarrow k = S = 8$.

▼ 07 a 09 – Concursos militares

07 (D) · EPCAR 2023.

Soma das raízes: $-\frac{m-10}{m-2} = 7$, então $10 - m = 7m - 14$ e $m = 3$.

Numerador: $9 - \frac{27}{8} = \frac{45}{8}$, dividido por $\frac{15}{64}$: $\frac{45}{8} \cdot \frac{64}{15} = 24$.

Denominador: $(m^7 - m)^0 = 1$, então fica $\sqrt[3]{64^{-1}} = \frac{1}{4}$. $B = 24 \cdot 4 = 96$.

$96 = 2^5 \cdot 3$ tem $(5+1)(1+1) = 12$ divisores naturais.

08 (B) · EFOMM 2023.

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} = \frac{(p+q)^2 - 2pq}{(pq)^2} = \frac{4 - 2k}{k^2} = 6$$

$$6k^2 + 2k - 4 = 0 \ \Rightarrow\ 3k^2 + k - 2 = 0$$

O produto das raízes dessa equação em k é $-\frac{2}{3}$ (os valores são $k = -1$ e $k = \frac{2}{3}$).

09 (C) · EFOMM 2022.

$u = \frac{1}{p}$ e $v = \frac{1}{q}$ são raízes da equação recíproca $-x^2 + 2x + 5 = 0$, ou seja, $x^2 - 2x - 5 = 0$: $u + v = 2$ e $uv = -5$.

As somas de potências $S_k = u^k + v^k$ obedecem a $S_k = 2S_{k-1} + 5S_{k-2}$:

$$S_1 = 2,\ S_2 = 14,\ S_3 = 38,\ S_4 = 146,\ S_5 = 2 \cdot 146 + 5 \cdot 38 = 482$$