PROF. LUIS TEIXEIRA
Física | Matemática

FICHA DE MATEMÁTICA

Circunferência

Comprimento e área do círculo

Aluno(a): _____ | **Data:** ___/___/____ | **Prof.:** Luis Teixeira

1. TEORIA

OBSERVAÇÃO

A **circunferência** é uma linha, da qual se mede o **comprimento** (em cm, m etc.); o **círculo** é uma região, da qual se mede a **área** (em cm², m² etc.). As duas fórmulas dependem apenas do **raio** e da constante π.

1.1 O número π

Medindo, em objetos de formato circular (uma moeda, uma lata, uma roda), o contorno C com uma fita métrica e o diâmetro d com uma régua, e calculando $C \div d$, obtém-se:

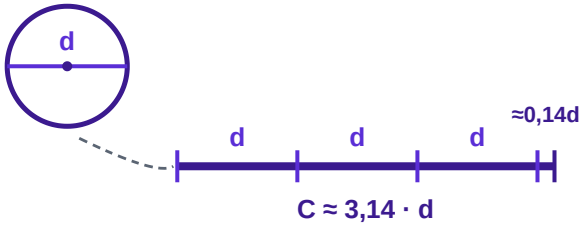
Objeto	Contorno C	Diâmetro d	$C \div d$
Moeda	$7{,}85$ cm	$2{,}5$ cm	$3{,}14$
Lata	$21{,}98$ cm	7 cm	$3{,}14$
Roda de bicicleta	$188{,}4$ cm	60 cm	$3{,}14$

O resultado é o mesmo, qualquer que seja o tamanho do objeto. Isso ocorre porque todas as circunferências são **semelhantes** (uma é ampliação ou redução da outra): se o diâmetro dobra, o contorno também dobra, e a razão não se altera.

DEFINIÇÃO

$$\pi = \frac{C}{d} \approx 3{,}14159\ldots$$

π é um número **irracional** (infinitas casas decimais, sem período). Nos cálculos, usa-se $\pi \approx 3{,}14$ ou deixa-se a resposta em função de π (por exemplo, 10π cm).



C ÷ d = π ≈ 3,14

para qualquer circunferência

Esticada sobre uma reta, a circunferência corresponde a um segmento um pouco maior que 3 diâmetros.

1.2 Comprimento da circunferência

Da definição, $C = \pi \cdot d$. Como $d = 2R$:

FÓRMULA

$$C = 2\pi R$$

Exemplo: se $R = 5$ cm, então $C = 2\pi \cdot 5 = 10\pi \approx 10 \cdot 3{,}14 = 31{,}4$ cm.

PROBLEMAS DE RODA

Quando uma roda dá **uma volta** completa sem deslizar, ela percorre uma distância igual ao seu **comprimento** C. Então:

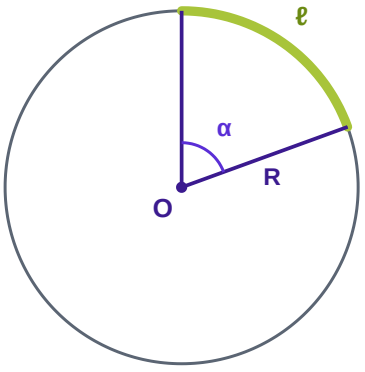
$$\text{distância} = n^\circ \text{ de voltas} \times C \qquad\qquad n^\circ \text{ de voltas} = \frac{\text{distância}}{C}$$

Atenção às **unidades**: converta todas as medidas para a mesma unidade (em geral, cm ou m).

1.3 Comprimento de um arco

Um arco de ângulo central α é uma parte da circunferência. A circunferência inteira (360°) mede $2\pi R$, e o arco mede uma **parte proporcional** a seu ângulo. Por regra de três:

Ângulo	Comprimento
360°	$2\pi R$
α	ℓ



FÓRMULA

$$\ell = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi R$$

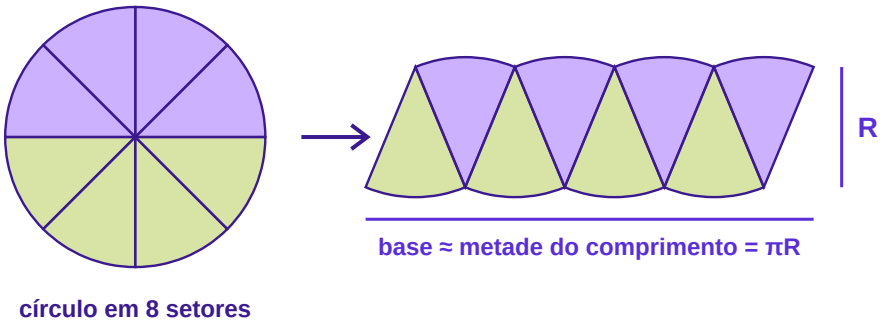
Exemplo: $\alpha = 60^\circ$ e $R = 6$: $\ell = \frac{60}{360} \cdot 12\pi = \frac{1}{6} \cdot 12\pi = 2\pi$.

ATENÇÃO

A **medida** do arco (60°) é diferente do **comprimento** do arco (2π cm). A medida em graus não depende do raio; o comprimento depende.

1.4 Área do círculo

Para justificar a fórmula da área do círculo, divide-se o círculo em muitos setores iguais e encaixam-se esses setores, alternando um voltado para cima e outro voltado para baixo:



Quanto maior o número de setores, mais a figura montada se aproxima de um retângulo.

1. Metade dos setores fica com o arco para baixo, e a outra metade, com o arco para cima. Logo, a **base** da figura é **meia circunferência**: $\frac{2\pi R}{2} = \pi R$.
2. A **altura** da figura é a medida do lado de um setor, isto é, o **raio** R.
3. Com muitos setores, a figura se aproxima de um **retângulo** de base πR e altura R:

FÓRMULA

$$A = \pi R \cdot R = \pi R^2$$

Exemplo: se $R = 3$ cm, então $A = 9\pi \approx 28{,}26$ cm². Se o dado for o **diâmetro** $d = 10$, calcule antes o raio, $R = 5$: $A = 25\pi$.

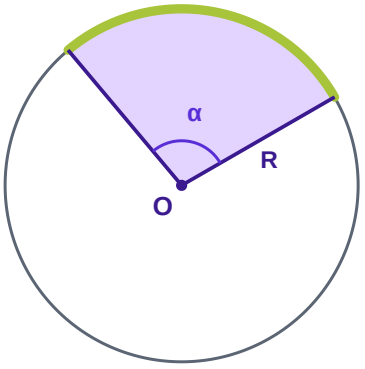
VARIAÇÃO DA ÁREA COM O RAIO

Como o raio aparece **ao quadrado**, multiplicar o raio por k multiplica a área por k^2. Se o raio dobra, a área quadruplica; se o raio triplica, a área fica 9 vezes maior. O comprimento, por sua vez, apenas dobra ou triplica.

1.5 Setor circular

Setor circular é a região do círculo limitada por dois raios e pelo arco compreendido entre eles. Sua área também é proporcional ao ângulo central:

Ângulo	Área
360°	πR^2
α	A_{setor}



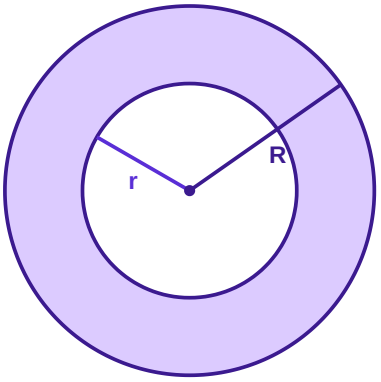
FÓRMULAS

$$A_{\text{setor}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi R^2 \qquad \text{ou} \qquad A_{\text{setor}} = \frac{\ell \cdot R}{2}$$

A segunda é útil quando o enunciado fornece o **comprimento do arco** ℓ (o setor se comporta como um triângulo de base ℓ e altura R).
Exemplo: $R = 10$, $\alpha = 90^\circ$: $A = \frac{1}{4} \cdot 100\pi = 25\pi$.

1.6 Coroa circular

Coroa circular é a região entre duas circunferências **concêntricas** (mesmo centro), como um CD ou uma pista de atletismo. A área é a do círculo maior menos a do menor:



FÓRMULA

$$A_{\text{coroa}} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi\left(R^2 - r^2\right)$$

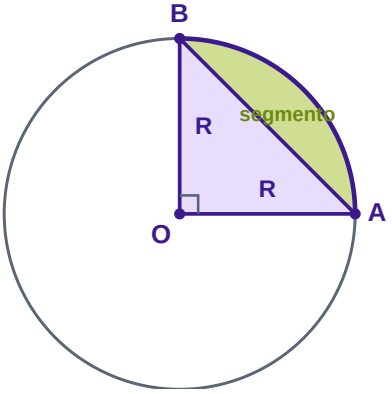
Exemplo: $R = 5$, $r = 3$: $A = \pi(25 - 9) = 16\pi$.

1.7 Segmento circular

Segmento circular é a região limitada por uma corda e pelo arco correspondente. Sua área é obtida por **subtração**:

$$A_{\text{segmento}} = A_{\text{setor}} - A_{\text{triângulo}}$$

Exemplo (ângulo central de 90° e $R = 4$): setor $= \frac{1}{4} \cdot 16\pi = 4\pi$; triângulo retângulo $= \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$. Segmento $= 4\pi - 8 \approx 4{,}56$.



REGIÕES SOMBREADAS

Em geral, a área de uma região sombreada é a **diferença entre as áreas de duas figuras conhecidas**. Identifique a figura que contém a região e a parte que deve ser descontada.

ERROS COMUNS

- Usar o **diâmetro** no lugar do raio na fórmula da área (πd^2 está errado; use πR^2).
- Elevar o π ao quadrado: πR^2 significa $\pi \cdot (R^2)$, e **não** $(\pi R)^2$.
- Na coroa, fazer $\pi(R-r)^2$. O correto é $\pi(R^2-r^2)$. Ex.: $R=5$, $r=3$: $\pi(25-9)=16\pi$, e não 4π.
- Supor que, se o raio dobra, a área também dobra.
- Misturar unidades (m e cm) em problemas de roda.

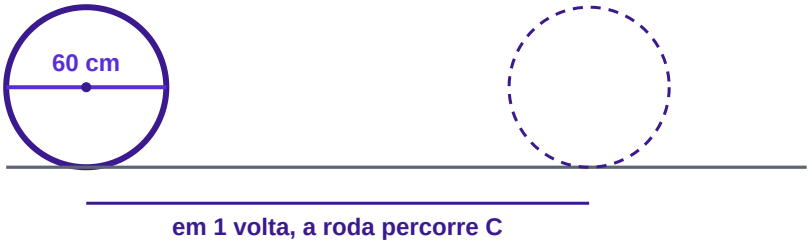
1.8 Quadro-resumo

O que calcular	Fórmula	Unidade
Comprimento da circunferência	$C = 2\pi R = \pi d$	cm, m
Comprimento do arco	$\ell = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi R$	cm, m
Área do círculo	$A = \pi R^2$	cm², m²
Área do setor	$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi R^2 = \frac{\ell R}{2}$	cm², m²
Área da coroa	$\pi(R^2 - r^2)$	cm², m²
Área do segmento	setor − triângulo	cm², m²

2. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exercício resolvido 1. A roda de uma bicicleta tem 60 cm de diâmetro. (a) Quanto a bicicleta anda quando a roda dá uma volta? (b) Quantas voltas a roda dá num percurso de 942 m? (Use $\pi = 3{,}14$.)

Resolução:

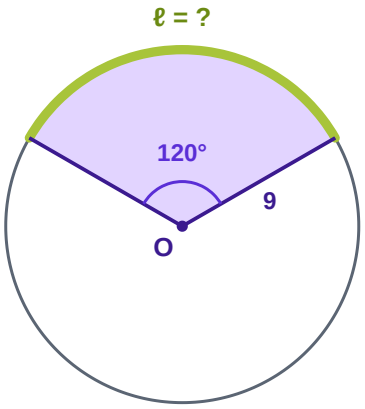


1. **Uma volta:** a bicicleta percorre o comprimento da roda, $C = \pi d = 3{,}14 \cdot 60 = 188{,}4$ cm.
2. **Mesma unidade:** 942 m $= 94\,200$ cm.
3. **Número de voltas:** $\dfrac{94\,200}{188{,}4} = 500$.

Resposta: (a) $188{,}4$ cm; (b) 500 voltas.

Exercício resolvido 2. Calcule o comprimento de um arco de 120° numa circunferência de raio 9 cm.

Resolução:



1. **Circunferência inteira:** $C = 2\pi \cdot 9 = 18\pi$ cm.
2. **Fração da circunferência:** $\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}$.
3. **Comprimento:** $\ell = \frac{1}{3} \cdot 18\pi = 6\pi \approx 18{,}84$ cm.

Resposta: $\ell = 6\pi$ cm ($\approx 18{,}84$ cm).

Exercício resolvido 3. Uma circunferência tem comprimento 20π cm. Calcule a área do círculo correspondente.

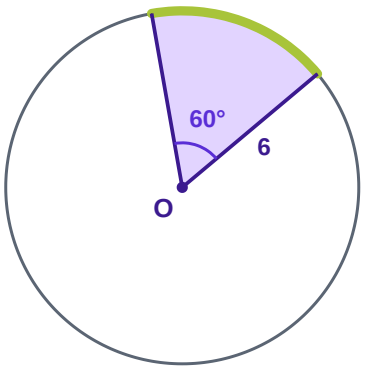
Resolução:

1. **Raio** a partir do comprimento: $2\pi R = 20\pi$. Dividindo os dois membros por 2π, $R = 10$ cm.
2. **Área:** $A = \pi R^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$ cm².
3. **Valor aproximado:** $100 \cdot 3{,}14 = 314$ cm².

Resposta: 100π cm² (≈ 314 cm²).

Exercício resolvido 4. Calcule a área de um setor circular de 60° num círculo de raio 6 cm.

Resolução:

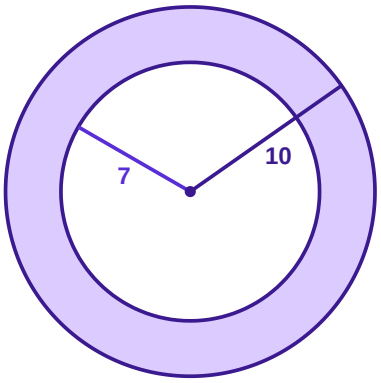


1. **Área do círculo inteiro:** $\pi \cdot 6^2 = 36\pi$.
2. **Fração:** $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$.
3. **Setor:** $\frac{1}{6} \cdot 36\pi = 6\pi \approx 18{,}84$ cm².

Resposta: 6π cm².

Exercício resolvido 5. Uma praça circular de raio 10 m tem, no centro, um canteiro circular de raio 7 m. O restante (a coroa) será calçado. Qual é a área a calçar? (Use $\pi = 3{,}14$.)

Resolução:

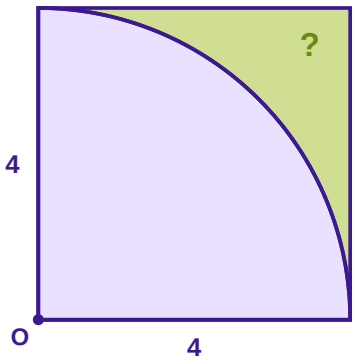


1. **Identificar:** a região calçada é uma **coroa circular** com $R = 10$ e $r = 7$.
2. **Fórmula:** $A = \pi(R^2 - r^2) = \pi(100 - 49) = 51\pi$.
3. **Aproximar:** $51 \cdot 3{,}14 = 160{,}14$ m².

Resposta: 51π **m²** $\approx 160{,}14$ **m².**

Exercício resolvido 6. Num quadrado de lado 4 cm desenha-se um quarto de círculo de raio 4 cm com centro num dos vértices. Calcule a área da região do quadrado que fica **fora** do quarto de círculo (em verde).

Resolução:

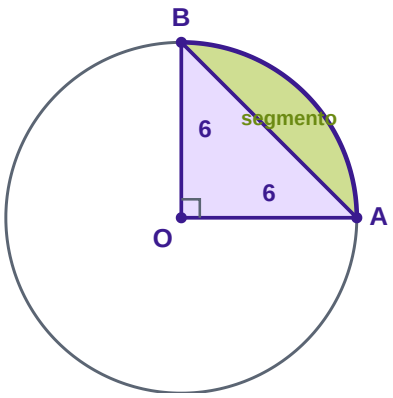


1. **Quadrado:** área $4^2 = 16$ cm².
2. **Quarto de círculo:** área $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4^2 = 4\pi$ cm².
3. **Região pedida:** $16 - 4\pi \approx 16 - 12{,}56 = 3{,}44$ cm².

Resposta: $(16 - 4\pi)$ **cm²** $\approx 3{,}44$ **cm².**

Exercício resolvido 7. Numa circunferência de raio 6 cm, os raios $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ são perpendiculares. Calcule a área do segmento circular limitado pela corda $\overline{AB}$ e pelo arco menor $\overset{\frown}{AB}$.

Resolução:

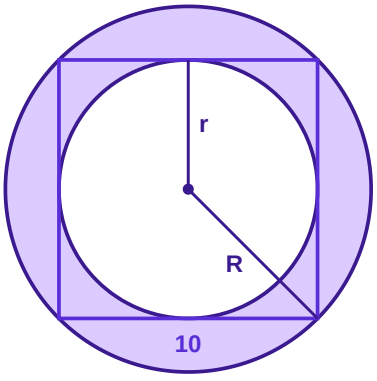


1. **Setor de $90°$:** $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 36 = 9\pi$.
2. **Triângulo OAB** (retângulo em O, catetos 6 e 6): $\frac{6 \cdot 6}{2} = 18$.
3. **Segmento = setor − triângulo:** $9\pi - 18 \approx 28{,}26 - 18 = 10{,}26$ cm².

Resposta: $(9\pi - 18)$ cm² $\approx 10{,}26$ cm².

Exercício resolvido 8 (desafio). Um quadrado de lado 10 cm tem uma circunferência inscrita (tangente aos lados) e uma circunscrita (passando pelos vértices). Calcule a área da coroa entre as duas.

Resolução:



1. **Raio da inscrita:** é a distância do centro ao ponto médio de um lado: $r = \frac{10}{2} = 5$.
2. **Raio da circunscrita:** é a distância do centro a um vértice, isto é, metade da diagonal. Diagonal $= 10\sqrt{2}$, então $R = 5\sqrt{2}$ e $R^2 = 50$.
3. **Coroa:** $\pi(R^2 - r^2) = \pi(50 - 25) = 25\pi$ cm².
4. **Observação:** não foi necessário calcular R; bastou conhecer R^2.

Resposta: 25π cm² $\approx 78{,}5$ cm².

3. EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01 Calcule o comprimento de uma circunferência de raio 7 cm. (Use $\pi = 3{,}14$.)

02 Uma circunferência tem $31{,}4$ m de comprimento. Qual é o seu raio? (Use $\pi = 3{,}14$.)

03 Calcule o comprimento de um arco de $45°$ numa circunferência de raio 12 cm (resposta em função de π).

04 Calcule a área de um círculo: (a) de raio 3 cm; (b) de diâmetro 10 cm (em função de π).

05 Calcule a área de um setor circular de 72° num círculo de raio 10 cm (em função de π).

06 Calcule a área de uma coroa circular de raios 5 cm e 3 cm (em função de π).

4. QUESTÕES DE CONCURSOS MILITARES

Questões oficiais de provas anteriores (EFOMM, EPCAR, EsPCEx, AFA e Escola Naval), selecionadas do banco de questões da Trilha Militares.

07 [EsPCEx 2020]

Para fabricar uma mesa redonda que comporte 8 pessoas em sua volta, um projetista concluiu que essa mesa, para ser confortável, deverá considerar, para cada um dos ocupantes, um arco de circunferência com 62,8 cm de comprimento. O tampo redondo da mesa será obtido a partir de uma placa quadrada de madeira compensada. Adotando $\pi = 3{,}14$, a menor medida do lado dessa placa quadrada que permite obter esse tampo de mesa é

(A) 72 cm.
(B) 80 cm.
(C) 144 cm.
(D) 160 cm.
(E) 180 cm.

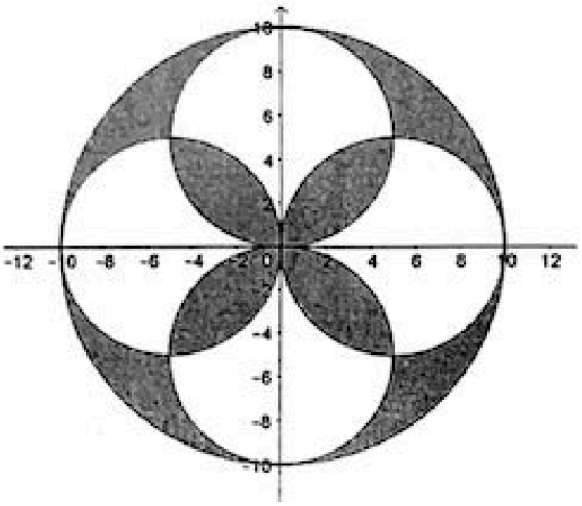
08 [EsPCEx 2016]

Se o perímetro de um triângulo equilátero inscrito em um círculo é 3 cm, a área do círculo (em cm²) é igual a

(A) $\frac{\pi}{3}$
(B) 3π
(C) π
(D) $3\sqrt{3}\,\pi$
(E) 81π

09 [EFOMM 2021]

Seja o círculo maior com centro na origem e raio $10\,\text{cm}$. Os círculos menores têm raio $5\,\text{cm}$. O valor da área hachurada, em cm^2, é

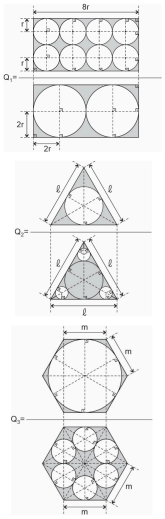


(A) $\frac{250}{3}(1-\pi)$

(B) $50(\pi - 1)$
(C) $100(\pi - 1)$
(D) $100(\pi - 2)$
(E) $\frac{100}{3}(1 - \pi)$

10 [AFA 2027]

Quando se escreve $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, entende-se como razão entre a e b, nessa ordem. Por analogia, considere as razões Q1, Q2 e Q3 entre as áreas destacadas em cinza nas figuras abaixo, sendo os triângulos e os hexágonos regulares.



A relação correta entre Q1, Q2 e Q3 é:

(A) $Q_1 = Q_3 > Q_2$
(B) $Q_3 < Q_2 < Q_1$
(C) $Q_2 < Q_1 < Q_3$
(D) $Q_3 > Q_2 > Q_1$

11 [Escola Naval 2024]

Considere um semicírculo de diâmetro $\overline{ML}$ e sua reta tangente em L. Suponha que F é um ponto desta reta tal que $\overline{FL} = \frac{\overline{FM}}{2}$. Calcule a área da porção do triângulo FML situado no exterior do semicírculo e assinale a opção correta.

(A) $\left(\frac{5\sqrt{3}-2}{12}\right) r^2$
(B) $\left(\frac{5\sqrt{3}-\pi}{12}\right) r^2$
(C) $\left(\frac{\sqrt{3}-2\pi}{12}\right) r^2$
(D) $\left(\frac{5\sqrt{2}-2\pi}{12}\right) r^2$
(E) $\left(\frac{5\sqrt{3}-2\pi}{12}\right) r^2$

5. GABARITO COMENTADO

Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.
07	D	08	A	09	D	10	B
11	E						

▼ 01 a 06 – Fixação

01. $C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 7 = 43{,}96$ cm.

02. $2 \cdot 3{,}14 \cdot R = 31{,}4 \Rightarrow 6{,}28R = 31{,}4 \Rightarrow R = 5$ m.

03. $C = 24\pi$; $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$; $\ell = \frac{24\pi}{8} = 3\pi$ cm.

04. (a) $\pi \cdot 3^2 = 9\pi$ cm². (b) $R = 5$: $\pi \cdot 5^2 = 25\pi$ cm².

05. $\frac{72}{360} = \frac{1}{5}$; $A = \frac{1}{5} \cdot 100\pi = 20\pi$ cm².

06. $\pi(25 - 9) = 16\pi$ cm².

▼ 07 a 11 – Concursos militares

07 (D) · EsPCEx 2020.

$$2\pi r = 8 \cdot 62{,}8 = 502{,}4 \;\Rightarrow\; r = \frac{502{,}4}{6{,}28} = 80 \text{ cm}$$

O menor quadrado que contém o círculo tem lado igual ao diâmetro: 160 cm.

08 (A) · EsPCEx 2016.

O lado mede 1 cm. No triângulo equilátero, $\ell = R\sqrt{3}$:

$$R = \frac{1}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; A = \pi R^2 = \frac{\pi}{3}$$

09 (D) · EFOMM 2021.

Chame de L a área de cada lente formada por dois círculos menores vizinhos (centros a $5\sqrt{2}$, arco de 90° em cada um):

$$L = 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 5^2}{4} - \frac{5^2}{2} \right) = \frac{25\pi}{2} - 25$$

A união dos quatro círculos menores tem área $4 \cdot 25\pi - 4L$, então a parte do círculo maior fora deles vale $100\pi - (100\pi - 4L) = 4L$.

Hachurado = 4 lentes centrais + região externa:

$$4L + 4L = 8L = 100\pi - 200 = 100(\pi - 2)$$

10 (B) · AFA 2027.

Q1: os dois retângulos medem $8r \times 4r$; em cima, 8 círculos de raio r; embaixo, 2 de raio $2r$. Mesma área de círculos ($8\pi r^2$): $Q_1 = 1$.

Q2: com $\rho = \frac{\ell}{2\sqrt{3}}$ o raio do incírculo e $S = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$, em cima a parte cinza é $S - \pi\rho^2 \approx 0{,}171\ell^2$; embaixo, o triângulo menos os três círculos dos cantos (raio $\frac{\rho}{3}$), $S - \frac{\pi\rho^2}{3} \approx 0{,}346\ell^2$: $Q_2 \approx 0{,}49$.

Q3: em cima, hexágono menos o incírculo: $\frac{3\sqrt{3}}{2}m^2 - \frac{3\pi}{4}m^2 \approx 0{,}242m^2$; embaixo, hexágono menos seis círculos inscritos nos triângulos equiláteros de lado m (área $\frac{\pi m^2}{12}$ cada): $\approx 1{,}027m^2$. $Q_3 \approx 0{,}24$.

$Q_3 < Q_2 < Q_1$.

11 (E) · Escola Naval 2024.

No triângulo FLM, retângulo em L, $\operatorname{sen}\hat{M} = \frac{FL}{FM} = \frac{1}{2}$: $\hat{M} = 30^\circ$, $ML = 2r$ e $FL = \frac{2r}{\sqrt{3}}$. Área do triângulo: $\frac{2r^2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r^2$.

A corda MP (P na circunferência, sobre MF) tem ângulo inscrito de 30° com o diâmetro, então o arco PL mede 60° e o arco MP mede 120°. A parte do semicírculo dentro do triângulo é o triângulo OMP mais o setor OPL (O centro):

$$\frac{1}{2}r^2\operatorname{sen}120^\circ + \frac{\pi r^2}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 + \frac{\pi}{6}r^2$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 - \frac{\pi}{6}r^2 = \frac{5\sqrt{3} - 2\pi}{12}r^2$$