PROF. LUIS TEIXEIRA
Física | Matemática

FICHA DE MATEMÁTICA

Circunferência

Polígonos regulares inscritos e circunscritos

Aluno(a): _____ | **Data:** ___/___/____ | **Prof.:** Luis Teixeira

1. TEORIA

1.1 O que é um polígono regular

DEFINIÇÃO

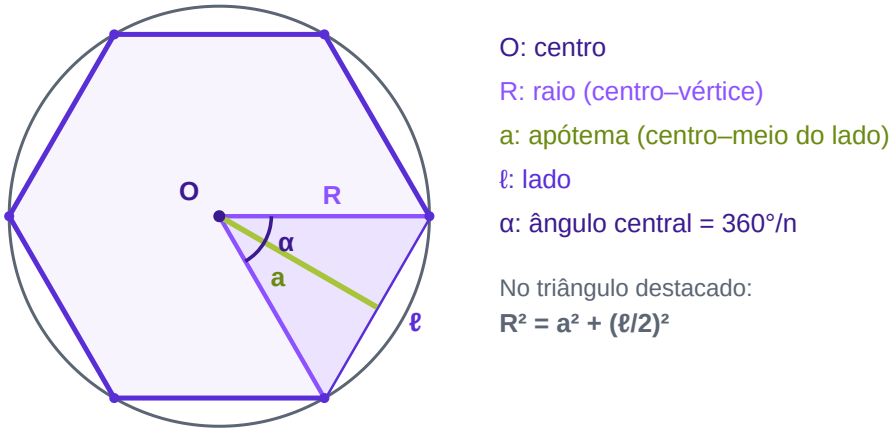
Um polígono é **regular** quando tem **todos os lados iguais** e **todos os ângulos internos iguais**.
Exemplos: triângulo equilátero, quadrado, pentágono regular, hexágono regular...

ERRO COMUM

Ter lados iguais **não basta**. O losango tem os 4 lados iguais, mas seus ângulos não são todos iguais; por isso, não é regular. O retângulo tem os ângulos iguais, mas não os lados: também não é regular.

Todo polígono regular pode ser **inscrito** numa circunferência (todos os vértices sobre ela) e **circunscrito** a outra circunferência (todos os lados tangentes a ela). As duas circunferências têm o **mesmo centro** O, chamado **centro do polígono**.

1.2 Elementos



Hexágono regular inscrito: centro, raio, apótema, lado e ângulo central.

- **Raio** R: distância do centro a um **vértice**. É o raio da circunferência **circunscrita** ao polígono.
- **Apótema** a: distância do centro ao **ponto médio de um lado**. É perpendicular ao lado e é o raio da circunferência **inscrita** no polígono.
- **Ângulo central** α: ângulo com vértice no centro formado por dois raios consecutivos.

DICA

Raio, apótema e metade do lado formam um **triângulo retângulo** (o apótema é perpendicular ao lado e cai no seu ponto médio). Por Pitágoras:

$$R^2 = a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2.$$

As fórmulas desta ficha podem ser obtidas a partir desse triângulo.

1.3 Ângulos de um polígono regular de n lados

FÓRMULAS

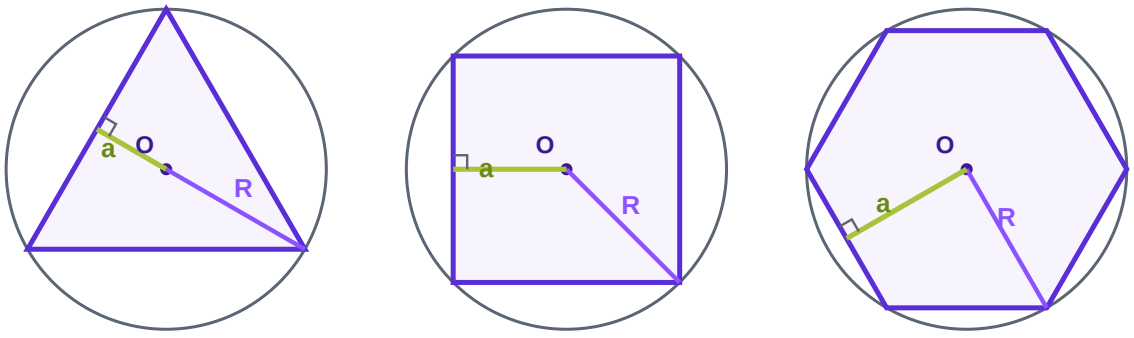
- **Ângulo central:** $a_c = \dfrac{360^\circ}{n}$, pois os n ângulos centrais completam uma volta.
- **Ângulo externo:** $a_e = \dfrac{360^\circ}{n}$, pois a soma dos ângulos externos de qualquer polígono convexo é 360°.
- **Ângulo interno:** $a_i = 180^\circ - a_e = \dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$, pois interno e externo são suplementares.
- **Soma dos internos:** $S_i = (n-2)\cdot 180^\circ$, pois, a partir de um vértice, o polígono se divide em $n-2$ triângulos.

Exemplo: pentágono regular ($n = 5$): $a_c = a_e = 72^\circ$ e $a_i = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

DICA

Em polígono **regular**, o ângulo central é igual ao ângulo externo. Se o problema fornecer o ângulo interno, calcule $a_e = 180^\circ - a_i$ e, em seguida, $n = \dfrac{360^\circ}{a_e}$.

1.4 Polígonos inscritos numa circunferência de raio R



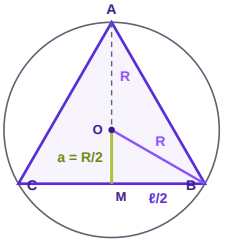
Triângulo equilátero **Quadrado** **Hexágono**

Em cada caso: raio R (roxo) até um vértice e apótema a (verde) até o meio de um lado.

Quadrado. A diagonal do quadrado é um diâmetro: $d = 2R$. Como $d = \ell\sqrt{2}$, temos $\ell\sqrt{2} = 2R \Rightarrow \ell = R\sqrt{2}$. O apótema é metade do lado: $a = \dfrac{\ell}{2} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Hexágono. O ângulo central é 60°. Cada triângulo formado pelo centro e um lado é isósceles (dois lados iguais a R) com ângulo de 60° entre eles, logo é **equilátero**: $\ell = R$. O apótema é a altura desse triângulo equilátero:

$a = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.



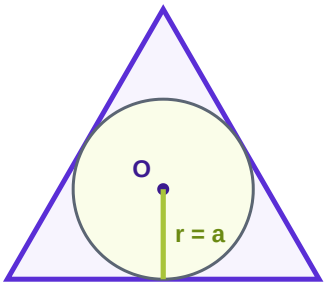
Triângulo equilátero inscrito.

Triângulo equilátero. No equilátero, o centro O é também o baricentro, que divide a altura AM na razão $2:1$. Assim $AO = R$ e $OM = a = \dfrac{R}{2}$, e a altura vale $h = R + \dfrac{R}{2} = \dfrac{3R}{2}$.

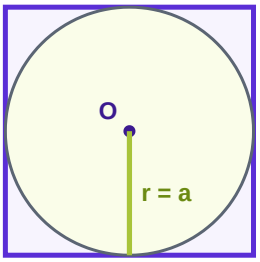
No triângulo retângulo OMB: $\left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2 = R^2 - \left(\dfrac{R}{2}\right)^2 = \dfrac{3R^2}{4}$, logo $\dfrac{\ell}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ e $\ell = R\sqrt{3}$.

Inscrito em circ. de raio R	Lado ℓ	Apótema a
Triângulo equilátero	$R\sqrt{3}$	$\dfrac{R}{2}$
Quadrado	$R\sqrt{2}$	$\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$
Hexágono regular	R	$\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

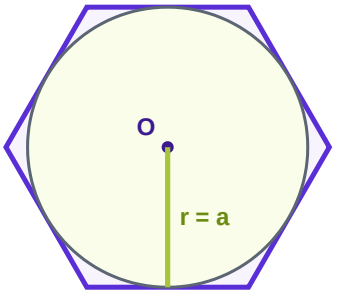
1.5 Polígonos circunscritos a uma circunferência de raio r



Triângulo equilátero



Quadrado



Hexágono

Quando o polígono está **circunscrito**, o raio r da circunferência é o **apótema** do polígono.

Nesse caso, o dado é o apótema ($a = r$), e o lado se obtém das relações da tabela anterior:

- **Triângulo:** $a = \dfrac{R}{2}$ e $\ell = R\sqrt{3} \Rightarrow R = 2r \Rightarrow \ell = 2r\sqrt{3}$.
- **Quadrado:** o lado é igual ao diâmetro da circunferência: $\ell = 2r$.
- **Hexágono:** $r = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell = \dfrac{2r}{\sqrt{3}} = \dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$.

1.6 Perímetro e área

FÓRMULAS

Perímetro: $2p = n \cdot \ell$ (semiperímetro $p = \dfrac{n\ell}{2}$).
Área: $A = p \cdot a$ (semiperímetro × apótema).

Justificativa: ligando o centro aos vértices, o polígono fica dividido em n triângulos congruentes, cada um com base ℓ e altura a. Então $A = n \cdot \dfrac{\ell \cdot a}{2} = \dfrac{n\ell}{2} \cdot a = p \cdot a$.

Casos que convém memorizar: triângulo equilátero de lado ℓ: $A = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$; hexágono regular: $A = 6 \cdot \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$ (seis triângulos equiláteros).

ERROS COMUNS

- Confundir **raio** (do centro a um vértice) com **apótema** (do centro ao ponto médio de um lado).
- Usar as fórmulas de **inscrito** quando o polígono está **circunscrito**. Verifique se a circunferência passa pelos vértices (polígono inscrito) ou tangencia os lados (polígono circunscrito).
- No hexágono, tomar o apótema como igual ao lado: o elemento igual ao lado é o **raio**.
- Usar $A = \ell \cdot a$ em vez de $A = p \cdot a$ (esquecer de dividir o perímetro por 2).

1.7 Quadro-resumo

Polígono	Inscrito (R): ℓ	Inscrito (R): a	Circunscrito (r): ℓ
Triângulo equilátero	$R\sqrt{3}$	$R/2$	$2r\sqrt{3}$
Quadrado	$R\sqrt{2}$	$R\sqrt{2}/2$	$2r$
Hexágono regular	R	$R\sqrt{3}/2$	$2r\sqrt{3}/3$
$a_c = a_e = \dfrac{360^\circ}{n}$ · $a_i = \dfrac{(n-2)180^\circ}{n}$ · $A = p \cdot a$ · $R^2 = a^2 + (\ell/2)^2$			

2. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exercício resolvido 1. Calcule o ângulo central, o ângulo externo e o ângulo interno de um dodecágono regular (12 lados).

Resolução:

1. **Ângulo central:** os 12 ângulos centrais completam uma volta: $a_c = \dfrac{360^\circ}{12} = 30^\circ$.
2. **Ângulo externo:** em polígono regular é igual ao central: $a_e = 30^\circ$.
3. **Ângulo interno:** é o suplemento do externo: $a_i = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.
4. **Verificação pela fórmula:** $a_i = \dfrac{(12-2)\cdot 180^\circ}{12} = \dfrac{1800^\circ}{12} = 150^\circ$.

Resposta: $a_c = 30^\circ$, $a_e = 30^\circ$, $a_i = 150^\circ$

Exercício resolvido 2. O ângulo interno de um polígono regular mede 140°. Quantos lados ele tem?

Resolução:

1. Em vez de resolver a equação dada pela fórmula do ângulo interno, é mais simples usar o **externo**: $a_e = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.
2. Como $a_e = \dfrac{360^\circ}{n}$: $n = \dfrac{360^\circ}{40^\circ} = 9$.
3. **Verificação:** $\dfrac{(9-2)\cdot 180^\circ}{9} = \dfrac{1260^\circ}{9} = 140^\circ$.

Resposta: 9 lados (eneágono)

Exercício resolvido 3. Um triângulo equilátero está inscrito numa circunferência de raio 6 cm. Calcule o lado, o apótema, o perímetro e a área do triângulo.

Resolução:

1. **Identifique o caso:** triângulo **inscrito**, então o dado 6 cm é o raio R (distância do centro a um vértice).
2. **Lado:** $\ell = R\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ cm.
3. **Apótema:** $a = \dfrac{R}{2} = 3$ cm.
4. **Perímetro:** $2p = 3 \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$ cm, então $p = 9\sqrt{3}$ cm.
5. **Área:** $A = p \cdot a = 9\sqrt{3} \cdot 3 = 27\sqrt{3}$ cm².
6. **Verificação** pela fórmula do equilátero: $\dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{108\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}$.

Resposta: $\ell = 6\sqrt{3}$ cm, $a = 3$ cm, $2p = 18\sqrt{3}$ cm, $A = 27\sqrt{3}$ cm²

Exercício resolvido 4. Um quadrado tem lado 8 cm. Calcule o raio da circunferência circunscrita a ele e o raio da circunferência inscrita nele.

Resolução:

1. **Circunscrita** (passa pelos vértices): o raio é o R do quadrado. Como $\ell = R\sqrt{2}$: $R = \dfrac{8}{\sqrt{2}} = \dfrac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$ cm.
   (Outra forma: a diagonal $8\sqrt{2}$ é o diâmetro, então $R = 4\sqrt{2}$.)
2. **Inscrita** (tangente aos lados): o raio é o apótema: $a = \dfrac{\ell}{2} = 4$ cm.
3. **Verificação por Pitágoras:** $R^2 = a^2 + (\ell/2)^2 = 16 + 16 = 32 \Rightarrow R = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

Resposta: circunscrita $4\sqrt{2}$ cm; inscrita 4 cm

Exercício resolvido 5. Um hexágono regular está inscrito numa circunferência de raio 10 cm. Calcule o lado, o apótema e a área do hexágono.

Resolução:

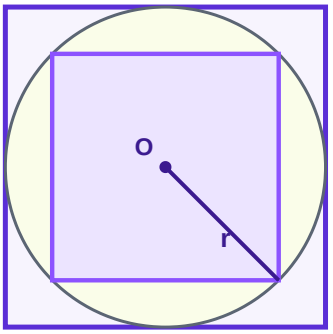
1. **Lado:** no hexágono inscrito o lado é igual ao raio: $\ell = 10$ cm (os 6 triângulos centrais são equiláteros).
2. **Apótema:** é a altura de um desses triângulos equiláteros: $a = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ cm.
3. **Semiperímetro:** $p = \dfrac{6 \cdot 10}{2} = 30$ cm.
4. **Área:** $A = p \cdot a = 30 \cdot 5\sqrt{3} = 150\sqrt{3}$ cm².
5. **Verificação:** 6 triângulos equiláteros de lado 10: $6 \cdot \dfrac{100\sqrt{3}}{4} = 150\sqrt{3}$.

Resposta: $\ell = 10$ cm, $a = 5\sqrt{3}$ cm, $A = 150\sqrt{3}$ cm²

Exercício resolvido 6. Numa circunferência de raio r desenham-se um quadrado inscrito e um quadrado circunscrito. Qual é a razão entre a área do circunscrito e a área do inscrito?

Resolução:

circunscrito: ℓ = 2r



inscrito: ℓ = r√2

1. **Circunscrito** (lados tangentes à circunferência): o lado é o diâmetro, $\ell_1 = 2r$, e a área é $A_1 = 4r^2$.
2. **Inscrito** (vértices sobre a circunferência): a diagonal é o diâmetro, $\ell_2 = r\sqrt{2}$, e a área é $A_2 = 2r^2$.
3. **Razão:** $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{4r^2}{2r^2} = 2.$
4. **Interpretação geométrica:** girando-se o quadrado inscrito de 45°, seus vértices passam a coincidir com os pontos médios dos lados do quadrado maior, e ele ocupa exatamente metade desse quadrado.

Resposta: a área do circunscrito é o dobro (razão 2)

Exercício resolvido 7. Um triângulo equilátero está circunscrito a uma circunferência de raio 2 cm. Calcule o lado e a área do triângulo.

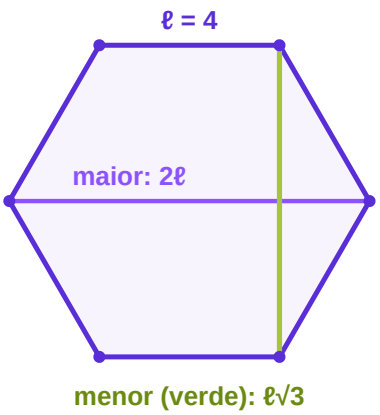
Resolução:

1. **Identifique o caso:** triângulo **circunscrito**, então o raio dado é o **apótema**: $a = 2$ cm.
2. No equilátero, $a = \dfrac{R}{2}$, logo $R = 2a = 4$ cm (distância do centro ao vértice).
3. **Lado:** $\ell = R\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ cm (ou, diretamente, $\ell = 2r\sqrt{3}$).
4. **Área:** $p = \dfrac{3 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$, e $A = p \cdot a = 6\sqrt{3} \cdot 2 = 12\sqrt{3}$ cm².
5. **Verificação:** $\dfrac{(4\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{48\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}.$

Resposta: $\ell = 4\sqrt{3}$ cm, $A = 12\sqrt{3}$ cm²

Exercício resolvido 8 (nível concurso). Um hexágono regular tem lado 4 cm. Calcule a diagonal maior, a diagonal menor e a distância entre dois lados paralelos.

Resolução:



1. **Diagonal maior** (liga vértices opostos): passa pelo centro, então vale $2R$. Como $R = \ell$: $D = 2 \cdot 4 = 8$ cm.
2. **Diagonal menor** (une dois vértices separados por um terceiro): forma, com dois lados, um triângulo isósceles com ângulo de 120°. De modo mais direto: ela é perpendicular à diagonal maior e é dividida ao meio por ela; cada metade é a altura de um triângulo equilátero de lado 4, isto é, $\frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. Então $d = 4\sqrt{3}$ cm.
3. **Distância entre lados paralelos:** são dois apótemas, $2a = 2 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ cm, valor igual ao da diagonal menor.

Resposta: $D = 8$ cm, $d = 4\sqrt{3}$ cm, distância $= 4\sqrt{3}$ cm

3. EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01 Calcule o ângulo central, o ângulo externo e o ângulo interno de um octógono regular.

02 Quantos lados tem o polígono regular cujo ângulo central mede 24°?

03 Um quadrado está inscrito numa circunferência de raio 6 cm. Calcule o lado e o apótema do quadrado.

04 Um hexágono regular está inscrito numa circunferência de raio 8 cm. Calcule o lado, o apótema e o perímetro.

05 Um triângulo equilátero de lado 12 cm está inscrito numa circunferência. Calcule o raio da circunferência e o apótema do triângulo.

06 Calcule a área de um hexágono regular de lado 6 cm.

4. QUESTÕES DE CONCURSOS MILITARES

Questões oficiais de provas anteriores (EFOMM, EPCAR, EsPCEx, AFA e Escola Naval), selecionadas do banco de questões da Trilha Militares.

07 [EFOMM 2018]

Qual é a área de uma circunferência inscrita em um triângulo equilátero, sabendo-se que esse triângulo está inscrito em uma circunferência de comprimento igual a 10π cm?

(A) $\frac{75\pi}{4}$
(B) $\frac{25\pi}{4}$
(C) $\frac{5\pi}{2}$
(D) $\frac{25\pi}{16}$
(E) $\frac{5\pi}{4}$

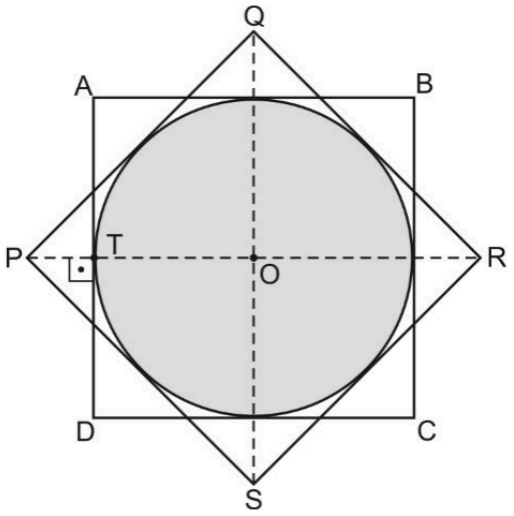
08 [AFA 2025]

Considere um triângulo retângulo cujo perímetro mede 15 unidades de comprimento e que seus lados estão em uma progressão aritmética crescente. A partir desse triângulo, podemos inscrever uma circunferência de raio r, bem como circunscrever outra circunferência de raio R. Então, a razão entre o raio da circunferência circunscrita e o raio da circunferência inscrita, nessa ordem, pertence ao intervalo:

(A) [1, 2[
(B) [2, 3[
(C) [3, 4[
(D) [4, 5]

09 [EPCAR 2022]

Na figura abaixo, ABCD e PQRS são dois quadrados cujos centros coincidem no ponto O.



Se $\overline{PT}$ mede 1 cm, então a área do círculo de centro O inscrito nesses quadrados, em cm², é igual a

(A) $\pi(1+2\sqrt{2})$
(B) $2\pi(1+2\sqrt{2})$
(C) $\pi(3+2\sqrt{2})$
(D) $2\pi(2+\sqrt{2})$

10 [Escola Naval 2024]

Um triângulo ABC, reto em $\hat{B}$, é tal que a bissetriz de $\hat{A}$ encontra a altura relativa à hipotenusa $\overline{BH}$, no ponto E. Sabe-se que $\overline{BC}$ e $\overline{BE}$ medem 7 cm e 3 cm, respectivamente. Determine a medida do raio do círculo inscrito no triângulo ABC e assinale a opção correta.

(A) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$
(B) $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$
(C) $\frac{7-\sqrt{7}}{2}$
(D) $\frac{11-\sqrt{11}}{2}$
(E) $\frac{13-\sqrt{13}}{2}$

11 [EFOMM 2025]

Seja T o triângulo ABC com lados de tamanho 10, 5 e $5\sqrt{3}$, com a relação entre seus ângulos $B\hat{A}C > B\hat{C}A > A\hat{B}C$. Dada a circunferência C inscrita no triângulo ABC interceptando-o nos pontos $P \in \overline{BC}$, $Q \in \overline{AC}$ e $R \in \overline{AB}$. Qual é o perímetro do quadrilátero convexo PBRQ?

(A) $\frac{5}{2}\left(5-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$
(B) $\frac{5}{3}\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)$
(C) $\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$
(D) $\frac{5}{2}\left(5-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)$
(E) $\frac{1}{3}\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$

5. GABARITO COMENTADO

Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.
07	B	08	B	09	C	10	C
11	A						

▼ 01 a 06 – Fixação

01. $n = 8$: $a_c = a_e = \dfrac{360^\circ}{8} = 45^\circ$; $a_i = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

02. $\dfrac{360^\circ}{n} = 24^\circ \Rightarrow n = 15$ lados.

03. $\ell = R\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm; $a = \dfrac{\ell}{2} = 3\sqrt{2}$ cm.

04. $\ell = R = 8$ cm; $a = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ cm; perímetro $= 6 \cdot 8 = 48$ cm.

05. $\ell = R\sqrt{3} \Rightarrow R = \dfrac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$ cm; $a = \dfrac{R}{2} = 2\sqrt{3}$ cm.

06. Seis triângulos equiláteros de lado 6: $A = 6 \cdot \dfrac{36\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3}$ cm². (Ou $p = 18$, $a = 3\sqrt{3}$, $A = 18 \cdot 3\sqrt{3} = 54\sqrt{3}$.)

▼ 07 a 11 – Concursos militares

07 (B) · EFOMM 2018.

$2\pi R = 10\pi$ dá $R = 5$. No triângulo equilátero, o inraio é metade do circunraio: $r = \frac{5}{2}$.

$$A = \pi r^2 = \frac{25\pi}{4}\ \text{cm}^2$$

08 (B) · AFA 2025.

Lados $x - d$, x, $x + d$ com $(x-d)^2 + x^2 = (x+d)^2$ dão $x = 4d$: lados proporcionais a 3, 4, 5. Com perímetro 15, são $\frac{15}{4}$, 5 e $\frac{25}{4}$.

$$R = \frac{25}{8}, \qquad r = \frac{\frac{15}{4} + 5 - \frac{25}{4}}{2} = \frac{5}{4}, \qquad \frac{R}{r} = \frac{5}{2}$$

09 (C) · EPCAR 2022.

Com raio r, o quadrado PQRS tem lado 2r e meia diagonal $PO = r\sqrt{2}$. T está à distância r de O, então $PT = r\sqrt{2} - r = 1$.

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 \ \Rightarrow\ \pi r^2 = \pi(3 + 2\sqrt{2})$$

10 (C) · Escola Naval 2024.

Seja D o ponto onde a bissetriz encontra BC. Os ângulos $\angle BED = \angle AEH = 90^\circ - \frac{A}{2}$ e $\angle BDE = 90^\circ - \frac{A}{2}$ são iguais, então $BD = BE = 3$ e $DC = 4$.

Pelo teorema da bissetriz, $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$. Com $AC^2 = AB^2 + 49$: $AC = 4\sqrt{7}$ e $AB = 3\sqrt{7}$.

$$r = \frac{AB + BC - AC}{2} = \frac{3\sqrt{7} + 7 - 4\sqrt{7}}{2} = \frac{7 - \sqrt{7}}{2}$$

11 (A) · EFOMM 2025.

$5^2 + (5\sqrt{3})^2 = 10^2$: o triângulo é retângulo em A (maior ângulo), com $BC = 10$, $AB = 5\sqrt{3}$ (oposto a $\hat{C} = 60^\circ$) e $AC = 5$ (oposto a $\hat{B} = 30^\circ$).

Com semiperímetro $p = \frac{15+5\sqrt{3}}{2}$, os segmentos tangentes são $t_A = p - 10 = \frac{5\sqrt{3}-5}{2}$, $t_B = p - 5 = \frac{5+5\sqrt{3}}{2}$ e $t_C = p - 5\sqrt{3} = \frac{15-5\sqrt{3}}{2}$.

$PB = BR = t_B$. Em A (ângulo reto), $RQ = t_A\sqrt{2}$. Em C (60°), o triângulo CPQ é equilátero: $QP = t_C$.

$$2p_{PBRQ} = 2t_B + \sqrt{2}\,t_A + t_C = \frac{25 + 5\sqrt{3} + 5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2}\left(5 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}\right)$$