FICHA DE MATEMÁTICA

Circunferência

Relações métricas

Aluno(a): _____ | **Data:** ___/___/____ | **Prof.:** Luis Teixeira

1. TEORIA

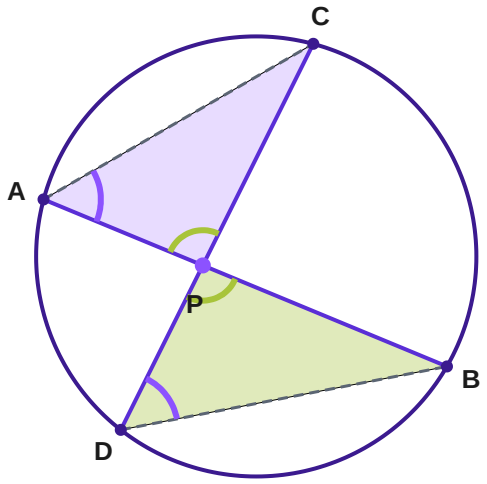
OBSERVAÇÃO

Quando, por um ponto P, se traçam retas secantes ou tangentes a uma circunferência, formam-se **triângulos semelhantes**. Dessa semelhança resulta que **o produto das distâncias de P aos dois pontos de interseção é constante**. Esse valor é chamado **potência do ponto P**, e todas as relações desta ficha são casos particulares desse resultado.

PRÉ-REQUISITOS

- **Ângulo inscrito** (ficha de ângulos na circunferência): ângulos inscritos que subtendem o **mesmo arco** são congruentes.
- **Ângulo de segmento** (ficha de ângulos na circunferência): o ângulo entre uma tangente e uma corda é igual ao ângulo inscrito que subtende o mesmo arco.
- **Semelhança AA**: dois triângulos que têm dois ângulos respectivamente congruentes são semelhantes; nesse caso, seus lados correspondentes são proporcionais.
- **Raio e tangente**: o raio que vai ao ponto de tangência é perpendicular à reta tangente.

1.1 Duas cordas que se cruzam (ponto P interior)



Triângulos PAC (roxo) e PDB (verde): ângulos marcados iguais.

Justificativa

1. $\hat{A}$ (ângulo $C\hat{A}B$) e $\hat{D}$ (ângulo $C\hat{D}B$) são inscritos e subtendem o **mesmo arco** $\overset{\frown}{CB}$; logo, são congruentes.
2. Os ângulos em P são **opostos pelo vértice** e, portanto, congruentes.
3. Logo, $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ (caso AA), e os lados correspondentes são proporcionais:

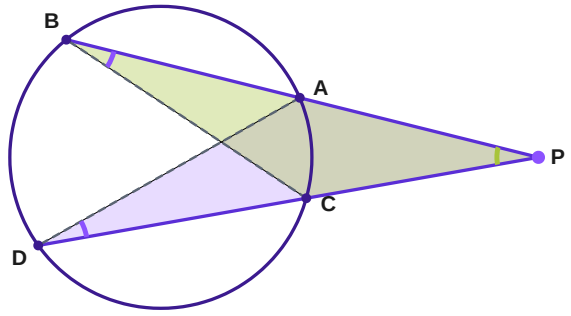
$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

RELAÇÃO DAS CORDAS

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

O produto das medidas das **duas partes** de uma corda é igual ao produto das medidas das duas partes da outra.
Exemplo: se $PA = 2$, $PB = 6$ e $PC = 3$, então $2 \cdot 6 = 3 \cdot PD$ e, portanto, $PD = 4$.

1.2 Duas secantes traçadas de um ponto exterior



Triângulos PAD (roxo) e PCB (verde). A e C são os pontos mais próximos de P.

Justificativa

1. $\hat{B}$ (ângulo $P\hat{B}C$) e $\hat{D}$ (ângulo $P\hat{D}A$) são inscritos e subtendem o mesmo arco $\overset{\frown}{AC}$; logo, são congruentes.
2. O ângulo $\hat{P}$ é **comum** aos dois triângulos.
3. Então $\triangle PCB \sim \triangle PAD$ e

$$\frac{PC}{PA} = \frac{PB}{PD} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

RELAÇÃO DAS SECANTES

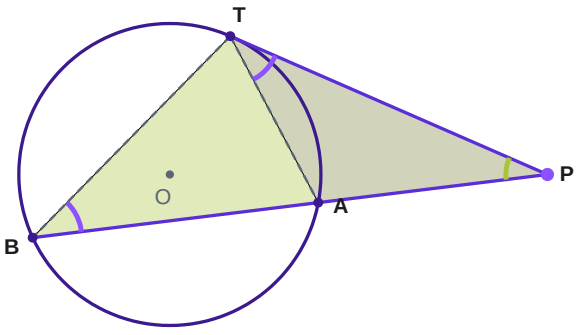
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \qquad (\text{externo} \times \text{inteiro} = \text{externo} \times \text{inteiro})$$

Exemplo: se $PA = 2$, $AB = 4$ (logo, $PB = 6$) e $PC = 3$, então $2 \cdot 6 = 3 \cdot PD$; assim, $PD = 4$ e a corda mede $CD = 4 - 3 = 1$.

ERRO COMUM

PB é o segmento **inteiro**, de P até o ponto mais afastado: $PB = PA + AB$. Um erro frequente é multiplicar a parte externa pela **corda** ($PA \cdot AB$).

1.3 Secante e tangente traçadas de um ponto exterior



Triângulos PTA (roxo) e PBT (verde).

Justificativa

1. O ângulo de segmento $P\hat{T}A$ (entre a tangente TP e a corda TA) mede metade do arco $\overset{\frown}{TA}$.
2. O ângulo inscrito $T\hat{B}A$ também mede metade do arco $\overset{\frown}{TA}$; logo, os dois ângulos são congruentes.
3. Como $\hat{P}$ é comum, $\triangle PTA \sim \triangle PBT$:

$$\frac{PT}{PB} = \frac{PA}{PT} \Rightarrow PT^2 = PA \cdot PB.$$

RELAÇÃO TANGENTE × SECANTE

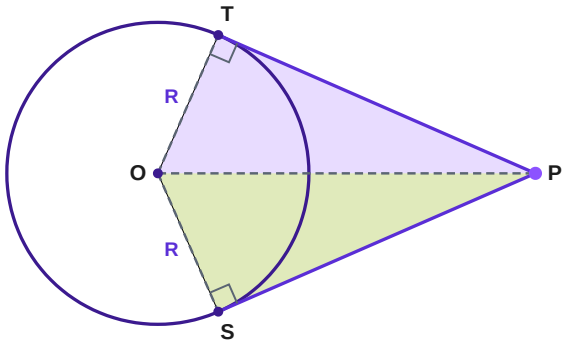
$$PT^2 = PA \cdot PB \qquad (\text{tangente}^2 = \text{externo} \times \text{inteiro})$$

Exemplo: se $PA = 2$ e $PB = 8$, então $PT^2 = 16$ e $PT = 4$.

OBSERVAÇÃO

Se a secante girar em torno de P até se tornar tangente, os pontos de interseção A e B se aproximam até coincidir com T. O produto $PA \cdot PB$ passa, então, a ser $PT \cdot PT = PT^2$.

1.4 Dois segmentos tangentes



$OT \perp PT$ e $OS \perp PS$: dois triângulos retângulos congruentes.

Justificativa

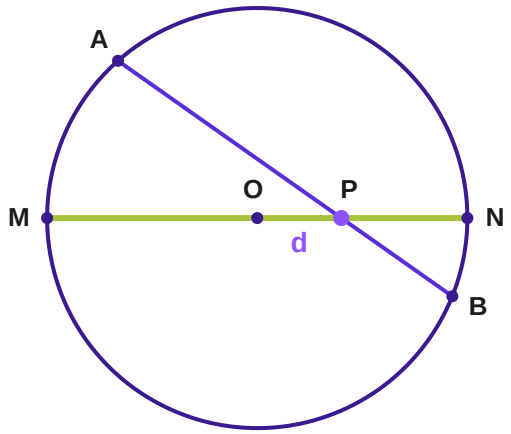
1. Os triângulos OTP e OSP são retângulos (em T e em S).
2. Têm a mesma hipotenusa OP e um cateto igual ($OT = OS = R$).
3. Pelo teorema de Pitágoras: $PT^2 = OP^2 - R^2 = PS^2 \Rightarrow PT = PS$.

PROPRIEDADE DOS SEGMENTOS TANGENTES

$$PT = PS \qquad \text{e} \qquad PT^2 = OP^2 - R^2$$

Além disso, $\overline{PO}$ é **bissetriz** do ângulo $T\hat{P}S$.
Exemplo: se $R = 3$ e $OP = 5$, então $PT = \sqrt{25 - 9} = 4$ (triângulo 3-4-5).

1.5 Potência de ponto



Por P passa a corda AB e o diâmetro MN.

Como o produto é o mesmo para **qualquer** corda que passa por P, pode-se usar a corda mais conveniente: o **diâmetro** MN.

Sendo $d = OP$: $PN = R - d$ e $PM = R + d$. Logo

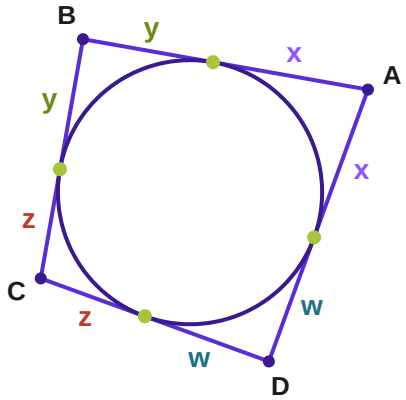
$$PA \cdot PB = PM \cdot PN = (R + d)(R - d) = R^2 - d^2.$$

Se P for exterior, o mesmo raciocínio com a secante que passa pelo centro fornece $(d - R)(d + R) = d^2 - R^2$.

POTÊNCIA DO PONTO P (D = DISTÂNCIA DE P AO CENTRO)

- P **exterior** ($d > R$): $PA \cdot PB = PT^2 = d^2 - R^2$.
- P **interior** ($d < R$): $PA \cdot PB = R^2 - d^2$, para **qualquer** corda que passe por P.
- P **sobre** a circunferência ($d = R$): potência zero.

1.6 Teorema de Pitot (quadrilátero circunscrito)



De cada vértice saem dois segmentos tangentes iguais (x, y, z, w).

Justificativa: pelo item 1.4, de cada vértice partem dois segmentos tangentes de mesma medida. Então:

$$AB + CD = (x + y) + (z + w)$$
$$BC + DA = (y + z) + (w + x)$$

As duas somas têm as mesmas parcelas e, portanto, são iguais.

TEOREMA DE PITOT

$$AB + CD = BC + AD$$

Num quadrilátero circunscrito a uma circunferência, as somas dos lados **opostos** são iguais.

NO TRIÂNGULO CIRCUNSCRITO

Com lados a, b, c e semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$, o segmento tangente que sai do vértice A mede $p - a$ (a é o lado **oposto** ao vértice A). Veja o Exercício resolvido 6.

ERROS COMUNS

- Usar a corda no lugar do segmento inteiro nas secantes.
- Esquecer de elevar a tangente ao quadrado.
- Aceitar medida negativa ao resolver uma equação do 2º grau: comprimento é sempre positivo.
- Na relação das cordas, misturar partes de cordas diferentes: cada produto usa as **duas partes da mesma corda**.

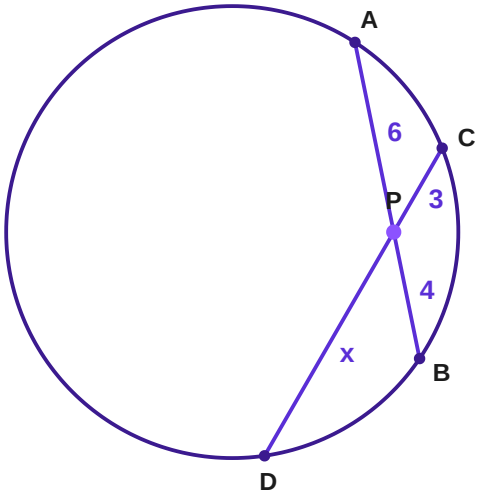
1.7 Quadro-resumo

Situação	Relação	Frase para lembrar
Duas cordas (P interior)	$PA \cdot PB = PC \cdot PD$	parte × parte = parte × parte
Duas secantes (P exterior)	$PA \cdot PB = PC \cdot PD$	externo × inteiro = externo × inteiro
Tangente e secante	$PT^2 = PA \cdot PB$	tangente² = externo × inteiro
Duas tangentes	$PT = PS$	tangentes do mesmo ponto são iguais
Distância ao centro	$\lvert d^2 - R^2 \rvert$	potência de ponto
Quadrilátero circunscrito	$AB + CD = BC + AD$	Pitot: somas dos lados opostos iguais

2. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exercício resolvido 1. As cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se cortam em P, com $PA = 6$, $PB = 4$ e $PC = 3$. Calcule PD.

Resolução:

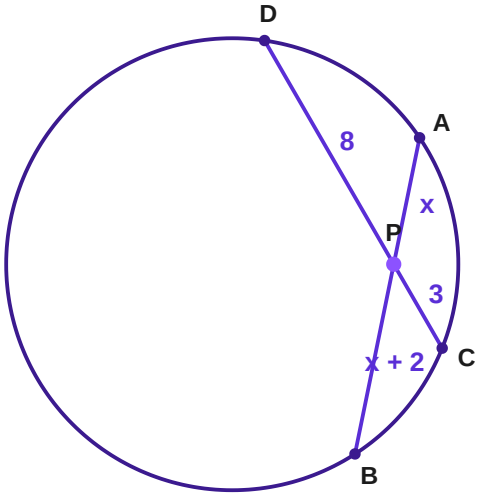


1. **Identificar a situação:** P é interior à circunferência (interseção de duas cordas); usa-se a relação das cordas.
2. **Montar a relação:** $PA \cdot PB = PC \cdot PD \Rightarrow 6 \cdot 4 = 3 \cdot x$.
3. **Resolver:** $24 = 3x \Rightarrow x = 8$.
4. **Verificação:** $3 \cdot 8 = 24 = 6 \cdot 4$.

Resposta: $PD = 8$

Exercício resolvido 2. Duas cordas se cortam em P. Numa delas, $PA = x$ e $PB = x + 2$; na outra, $PC = 3$ e $PD = 8$. Calcule x e o comprimento da corda AB.

Resolução:

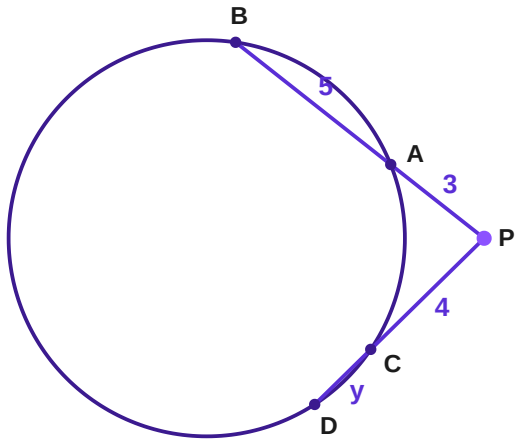


1. **Relação das cordas:** $x\,(x + 2) = 3 \cdot 8$.
2. **Desenvolver:** $x^2 + 2x = 24 \Rightarrow x^2 + 2x - 24 = 0$.
3. **Resolver** (soma -2, produto -24): as raízes são $x = 4$ e $x = -6$.
4. **Descartar** $x = -6$: comprimento não pode ser negativo.
5. **Corda:** $AB = x + (x + 2) = 4 + 6 = 10$. Verificação: $4 \cdot 6 = 24 = 3 \cdot 8$.

Resposta: $x = 4$ e $AB = 10$

Exercício resolvido 3. De um ponto P exterior traçam-se duas secantes. Na primeira, a parte externa mede $PA = 3$ e a corda $AB = 5$. Na segunda, a parte externa mede $PC = 4$. Calcule a corda CD.

Resolução:

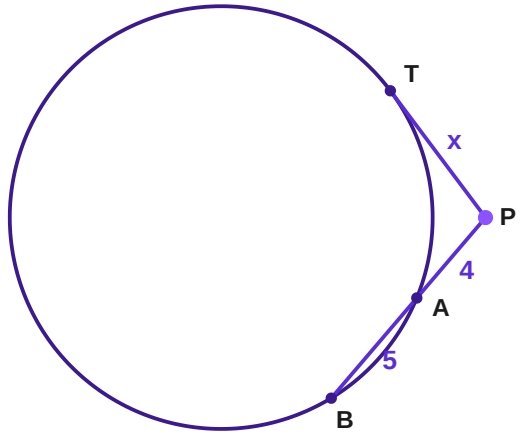


1. **Segmento inteiro da 1ª secante:** $PB = PA + AB = 3 + 5 = 8$.
2. **Relação das secantes:** $PA \cdot PB = PC \cdot PD \Rightarrow 3 \cdot 8 = 4 \cdot PD \Rightarrow PD = 6$.
3. **Corda:** o enunciado pede a **corda**, e não o segmento inteiro: $CD = PD - PC = 6 - 4 = 2$.

Resposta: $CD = 2$

Exercício resolvido 4. De um ponto P traçam-se a tangente $\overline{PT}$ e uma secante cuja parte externa mede $PA = 4$ e cuja corda mede $AB = 5$. Calcule PT.

Resolução:

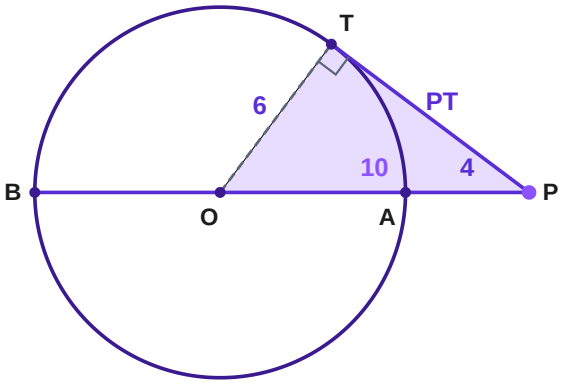


1. **Inteiro da secante:** $PB = 4 + 5 = 9$.
2. **Relação:** $PT^2 = PA \cdot PB = 4 \cdot 9 = 36$.
3. **Raiz positiva:** $PT = \sqrt{36} = 6$.

Resposta: $PT = 6$

Exercício resolvido 5. Um ponto P está a $10\ \text{cm}$ do centro O de uma circunferência de raio $6\ \text{cm}$. Calcule (a) o segmento tangente PT; (b) as distâncias de P aos pontos A e B onde a reta PO corta a circunferência, e confira a relação $PT^2 = PA \cdot PB$.

Resolução:

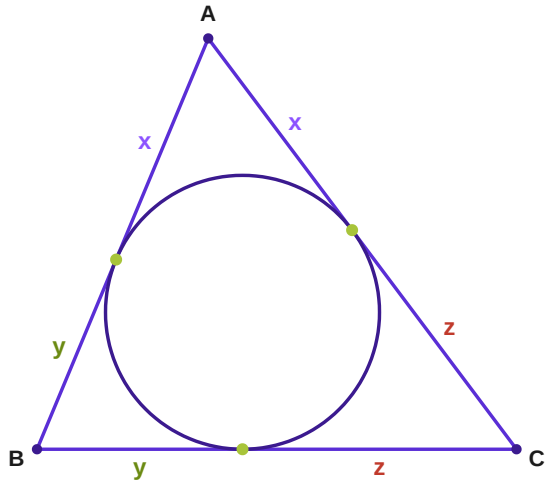


1. **(a)** O raio OT é perpendicular à tangente, então $\triangle OTP$ é retângulo em T, com hipotenusa $OP = 10$.
2. Pitágoras: $PT^2 = OP^2 - OT^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow PT = 8$.
3. **(b)** $PA = OP - R = 10 - 6 = 4$ e $PB = OP + R = 10 + 6 = 16$.
4. **Verificação:** $PA \cdot PB = 4 \cdot 16 = 64 = 8^2$, que é a potência do ponto: $d^2 - R^2 = 100 - 36 = 64$.

Resposta: $PT = 8$ cm; $PA = 4$ cm e $PB = 16$ cm

Exercício resolvido 6. Um triângulo ABC com $AB = 13$, $BC = 14$ e $CA = 15$ está circunscrito a uma circunferência. Calcule os segmentos tangentes a partir de cada vértice.

Resolução:

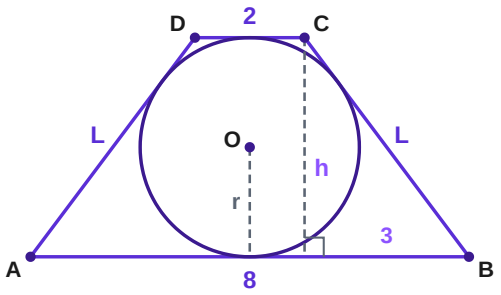


1. **Nomear:** de cada vértice saem dois segmentos tangentes iguais: x (de A), y (de B) e z (de C).
2. **Montar o sistema** a partir dos lados: $x + y = 13$ (lado AB), $y + z = 14$ (lado BC), $z + x = 15$ (lado CA).
3. **Somar as três:** $2(x + y + z) = 42 \Rightarrow x + y + z = 21$ (é o semiperímetro).
4. **Subtrair cada equação da soma:** $x = 21 - 14 = 7$, $y = 21 - 15 = 6$, $z = 21 - 13 = 8$.
5. **Verificação:** $7 + 6 = 13$, $6 + 8 = 14$, $8 + 7 = 15$. (Em geral, $x = p - BC$.)

Resposta: de A: 7; de B: 6; de C: 8

Exercício resolvido 7. [Nível concurso] Um trapézio isósceles de bases 8 e 2 está circunscrito a uma circunferência. Calcule os lados oblíquos, a altura e o raio da circunferência.

Resolução:

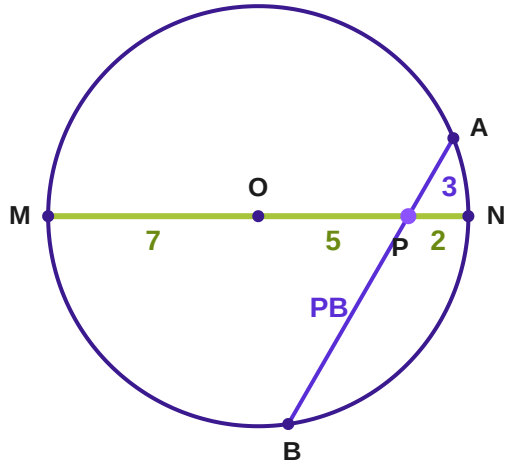


1. **Pitot:** a soma das bases é igual à soma dos lados oblíquos: $8 + 2 = L + L \Rightarrow L = 5$.
2. **Projeção do lado oblíquo:** traçando a altura a partir de C, determina-se na base maior um segmento de medida $\frac{8-2}{2} = 3$.
3. **Pitágoras** no triângulo retângulo de lados 3, h e 5: $h^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow h = 4$.
4. **Raio:** a circunferência tangencia as duas bases, que são paralelas; por isso, a altura é igual ao **diâmetro**: $2r = 4 \Rightarrow r = 2$.

Resposta: lados oblíquos 5, altura 4, raio 2

Exercício resolvido 8. [Nível concurso] Numa circunferência de raio 7, o ponto P dista 5 do centro. Uma corda $\overline{AB}$ passa por P com $PA = 3$. Calcule PB e o comprimento da corda.

Resolução:



1. **Estratégia:** o produto $PA \cdot PB$ é o mesmo para toda corda que passa por P; escolhe-se o diâmetro MN que passa por P.
2. No diâmetro: $PN = R - d = 7 - 5 = 2$ e $PM = R + d = 7 + 5 = 12 \Rightarrow PM \cdot PN = 24$.
3. **Potência:** $PA \cdot PB = 24 \Rightarrow 3 \cdot PB = 24 \Rightarrow PB = 8$.
4. **Corda:** $AB = 3 + 8 = 11$. (Pela fórmula: $R^2 - d^2 = 49 - 25 = 24$.)

Resposta: $PB = 8$ e $AB = 11$

3. EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01 As cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se cortam em P. Sabendo que $PA = 4$, $PB = 6$ e $PC = 3$, calcule PD.

02 Duas cordas se cortam em P. Numa delas, $PA = x$ e $PB = 12$; na outra, $PC = 6$ e $PD = x + 2$. Calcule x.

03 De um ponto P exterior traçam-se as secantes $\overline{PB}$ e $\overline{PD}$, que cortam a circunferência em A, B e C, D, respectivamente. Se $PA = 4$, $PB = 10$ e $PC = 5$, calcule PD e a corda CD.

04 De um ponto P traçam-se a tangente $\overline{PT}$ e a secante $\overline{PB}$. Sabendo que a parte externa da secante mede 3 e a corda AB mede 9, calcule PT.

05 De um ponto P traça-se uma tangente de medida 8 e uma secante que passa pelo centro, cuja parte externa mede 4. Calcule o raio da circunferência.

06 Um triângulo ABC com $AB = 10$, $BC = 12$ e $AC = 8$ está circunscrito a uma circunferência. Quanto mede o segmento tangente traçado do vértice A?

07 Um quadrilátero $ABCD$ é circunscrito a uma circunferência, com $AB = 7$, $BC = 9$ e $CD = 10$. Calcule AD.

4. QUESTÕES DE CONCURSOS MILITARES

Questões oficiais de provas anteriores (EFOMM, EPCAR, EsPCEx, AFA e Escola Naval), selecionadas do banco de questões da Trilha Militares.

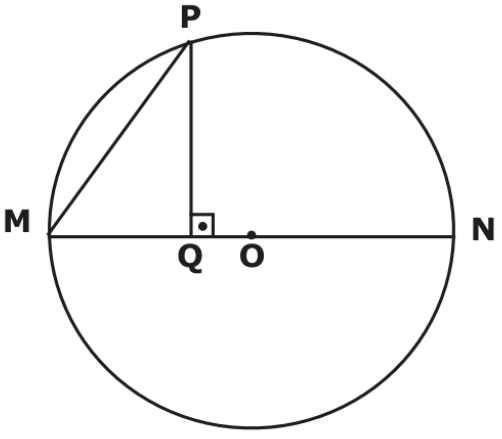
08 [EPCAR 2026]

Um aluno, "brincando" com seu material de desenho geométrico, régua, compasso, esquadro e transferidor, decidiu desenhar um semicírculo de centro O e raio r cm. Ele considerou o diâmetro $\overline{PQ}$ como "base" do seu semicírculo. Tomando M como ponto médio do segmento $\overline{OQ}$, o aluno traçou uma mediatriz, passando por M e intersectando o arco do semicírculo no ponto R. A razão entre os segmentos $\overline{RM}$ e $\overline{PM}$, nessa ordem, é igual a:

(A) $\frac{\sqrt{3}}{5}$
(B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(D) $\sqrt{3}$

09 [EsPCEx 2016]

Na figura, o raio da circunferência de centro O é $\frac{25}{2}$ cm e a corda MP mede 10 cm. A medida, em centímetros, do segmento PQ é



desenho ilustrativo-fora de escala

(A) $\frac{25}{2}$

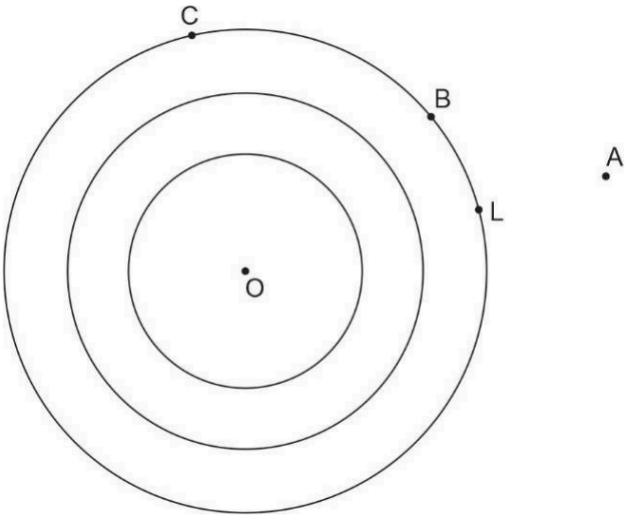
(B) 10
(C) $5\sqrt{21}$
(D) $\sqrt{21}$
(E) $2\sqrt{21}$

10 [EPCAR 2025]

Um dos esportes praticados pelos alunos da EPCAR é a Corrida de Orientação. Esse esporte tem como objetivo percorrer uma determinada distância em terreno variado e desconhecido, em que o atleta tem que passar, obrigatoriamente, por determinados pontos no terreno (posto de controle) demarcado em um mapa.

De acordo com fontes históricas, esse esporte surgiu em 1918 na Suécia, quando um corredor, que também era matemático, pensava que o tempo gasto para praticar uma atividade física, era um tempo perdido para a mente. Assim, ele resolveu começar a solucionar problemas matemáticos enquanto corria. A orientação é um esporte que alia a atividade física com uma atividade mental intensa. Um atleta de orientação pode concluir uma prova com uma velocidade média de 2,6 m/s.

Abaixo, temos parte de um mapa de uma pista de orientação.



Os pontos A, L e O são colineares, bem como os pontos C, B e A. O ponto L representa a largada e o ponto C o local de chegada. Um atleta terá que, obrigatoriamente, passar pelos postos de controle, representados no mapa pelos pontos A e B, nessa ordem.

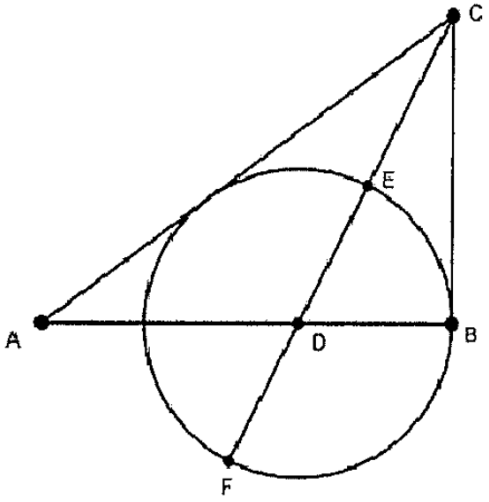
Sabendo que: o posto A está a 4 km de distância da largada; os pontos L, B e C pertencem a uma circunferência de centro O e raio 7 km; a distância entre os pontos A e B é igual a distância de B até C.

Com base no texto, e nas informações contidas acima, podemos afirmar que o tempo gasto por um atleta de orientação que manteve a velocidade média descrita no texto, largou no ponto L, passou pelos postos de controle A e B, nessa ordem, e finalizou a prova no ponto C, foi de aproximadamente:

(A) 63 min
(B) 103 min
(C) 113 min
(D) 153 min

11 [Escola Naval 2020]

Seja o triângulo ABC, retângulo em B, com $AB = 8\sqrt{2}$ e $BC = 6\sqrt{2}$. Sabendo que $\overline{CD}$ é bissetriz de $A\hat{C}B$, D é centro da circunferência de raio BD e x é a razão $\frac{EF}{CE}$, podemos afirmar que x é tal que



(A) $0 < x \leq 0{,}5$
(B) $0{,}5 < x \leq 1$
(C) $1 < x \leq 1{,}5$
(D) $1{,}5 < x \leq 2$
(E) $2 < x \leq 2{,}5$

5. GABARITO COMENTADO

Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.
08	B	09	E	10	B	11	D

▼ 01 a 07 – Fixação

01. $4 \cdot 6 = 3 \cdot PD \Rightarrow PD = 8$.

02. $12x = 6(x+2) \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = 2$. (Verificação: $2 \cdot 12 = 6 \cdot 4 = 24$.)

03. $4 \cdot 10 = 5 \cdot PD \Rightarrow PD = 8$; $CD = PD - PC = 8 - 5 = 3$.

04. Inteiro: $3 + 9 = 12$. $PT^2 = 3 \cdot 12 = 36 \Rightarrow PT = 6$.

05. Inteiro: $4 + 2R$. $8^2 = 4(4 + 2R) \Rightarrow 16 = 4 + 2R \Rightarrow R = 6$.

06. $p = \frac{10+12+8}{2} = 15$; tangente de A: $p - BC = 15 - 12 = 3$.

07. Pitot: $AB + CD = BC + AD \Rightarrow 7 + 10 = 9 + AD \Rightarrow AD = 8$.

▼ 08 a 11 – Concursos militares

08 (B) · EPCAR 2026.

$OM = \frac{r}{2}$ e $OR = r$. No triângulo retângulo OMR: $RM = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$.

$PM = PO + OM = r + \frac{r}{2} = \frac{3r}{2}$.

$$\frac{RM}{PM} = \frac{r\sqrt{3}/2}{3r/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

09 (E) · EsPCEx 2016.

MN é diâmetro ($MN = 25$), então o triângulo MPN é retângulo em P e PQ é a sua altura. Pela relação métrica $MP^2 = MQ \cdot MN$:

$$100 = MQ \cdot 25 \;\Rightarrow\; MQ = 4 \qquad PQ = \sqrt{MP^2 - MQ^2} = \sqrt{100 - 16} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

10 (B) · EPCAR 2025.

A está na reta OL, fora da circunferência: $AO = 7 + 4 = 11$ km. A reta ACB corta a circunferência em B e C, com $AC = 2AB$. Pela potência do ponto A:

$$AB \cdot AC = AO^2 - R^2 = 121 - 49 = 72 \;\Rightarrow\; 2AB^2 = 72 \;\Rightarrow\; AB = BC = 6\text{ km}$$

Percurso: $LA + AB + BC = 4 + 6 + 6 = 16$ km. A 2,6 m/s: $\frac{16\,000}{2{,}6} \approx 6154$ s ≈ 103 min.

11 (D) · Escola Naval 2020.

$AC = 10\sqrt{2}$. Pelo teorema da bissetriz, $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC} = \frac{10}{6}$, então $DB = \frac{6}{16} \cdot 8\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ (o raio).

$$CD = \sqrt{BC^2 + BD^2} = \sqrt{72 + 18} = 3\sqrt{10}$$

E e F são as extremidades do diâmetro sobre a reta CD: $EF = 6\sqrt{2}$ e $CE = CD - r = 3\sqrt{10} - 3\sqrt{2}$.

$$x = \frac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{10} - 3\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1{,}618$$