FICHA DE MATEMÁTICA

Circunferência

Ângulos excêntricos interior e exterior

Aluno(a): _____ | **Data:** ___/___/____ | **Prof.:** Luis Teixeira

1. TEORIA

1.1 Revisão (ficha de ângulos central, inscrito e de segmento)

O estudo dos ângulos excêntricos utiliza dois resultados já conhecidos.

ÂNGULO INSCRITO

Tem vértice na circunferência e mede a **metade** do arco compreendido: $\beta = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$.

ÂNGULO EXTERNO DE UM TRIÂNGULO

É igual à **soma** dos dois ângulos internos não adjacentes a ele: $e = x + y$.

DEFINIÇÃO

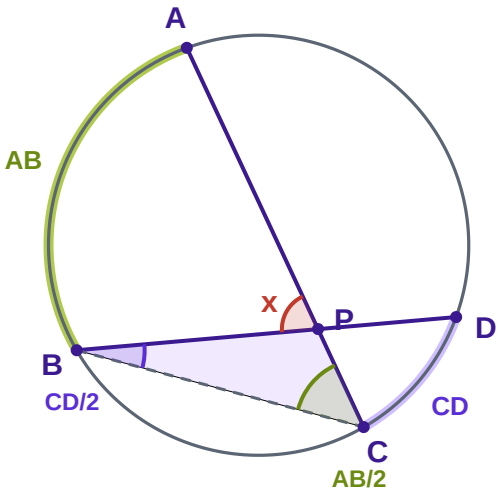
É um ângulo cujo vértice **não** está no centro e **não** está sobre a circunferência. Há dois tipos:

- **Excêntrico interior**: vértice **dentro** da circunferência (formado por duas cordas que se cruzam).
- **Excêntrico exterior**: vértice **fora** da circunferência (formado por secantes e/ou tangentes).

Em ambos os casos, o ângulo compreende **dois arcos** da circunferência, e sua medida depende dos dois.

1.2 Ângulo excêntrico interior

As cordas AC e BD se cruzam no ponto P, interior à circunferência. O ângulo $x = A\hat{P}B$ compreende o arco $\overset{\frown}{AB}$, e o seu **oposto pelo vértice** $C\hat{P}D$, congruente a ele, compreende o arco $\overset{\frown}{CD}$.



FÓRMULA

O ângulo excêntrico interior mede a **semissoma** dos dois arcos compreendidos:

$$x = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$$

Demonstração

Trace a corda BC (tracejada), formando o triângulo PBC (sombreado).

2. $x = A\hat{P}B$ é **ângulo externo** do triângulo PBC no vértice P (pois A, P, C estão alinhados). Logo $x = P\hat{B}C + P\hat{C}B$.

3. $P\hat{B}C = D\hat{B}C$ é inscrito e subtende $\overset{\frown}{CD}$; logo, mede $\dfrac{\overset{\frown}{CD}}{2}$.

4. $P\hat{C}B = A\hat{C}B$ é inscrito e subtende $\overset{\frown}{AB}$; logo, mede $\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$.

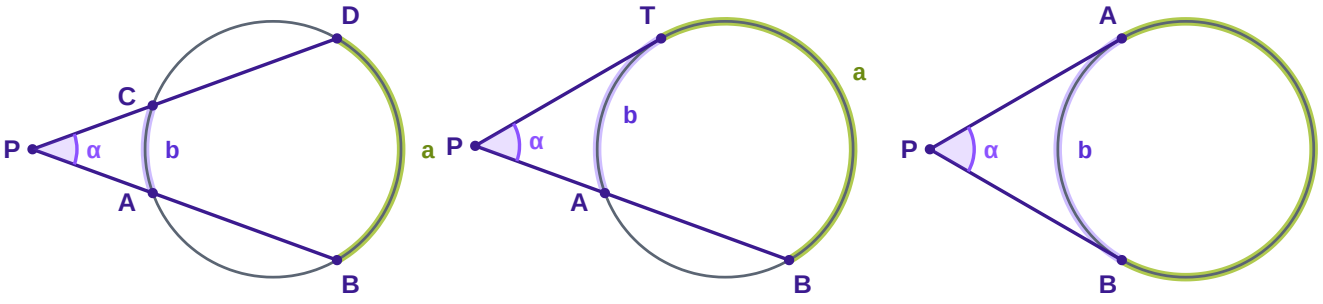
5. Somando: $x = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} + \dfrac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$. ∎

Exemplo: na figura, $\overset{\frown}{AB} = 100°$ e $\overset{\frown}{CD} = 40°$; logo, $x = \frac{100° + 40°}{2} = 70°$. O ângulo adjacente, $B\hat{P}C$, é o suplemento de x: $180° - 70° = 110°$. A fórmula também vale para ele: $\frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DA}}{2} = \frac{90° + 130°}{2} = 110°$.

> **CASO PARTICULAR**
>
> Se P for o **centro**, os dois arcos são iguais ao ângulo central e a fórmula fornece $\frac{\alpha + \alpha}{2} = \alpha$. Assim, o ângulo central é um caso particular do excêntrico interior.

1.3 Ângulo excêntrico exterior

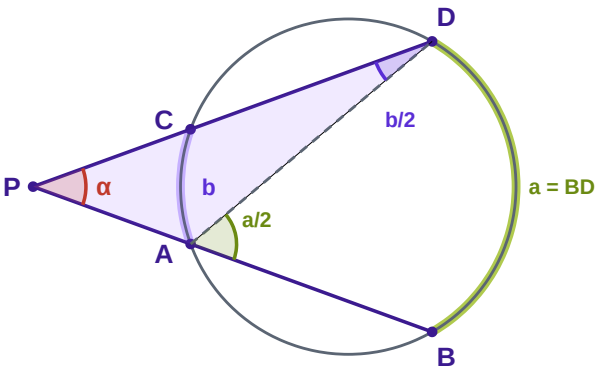
Neste caso, o vértice P é **exterior** à circunferência. Os lados podem ser duas secantes, uma secante e uma tangente, ou duas tangentes. Em todos os casos, o ângulo compreende um arco **maior**, mais afastado de P, que indicaremos por a, e um arco **menor**, mais próximo de P, que indicaremos por b.



duas secantes | secante e tangente | duas tangentes

> **FÓRMULA (VALE NOS TRÊS CASOS)**
>
> O ângulo excêntrico exterior é a **semidiferença** dos arcos compreendidos:
>
> $$\alpha = \frac{a - b}{2} \qquad (a = \text{arco mais afastado},\ b = \text{arco mais próximo})$$

Demonstração (duas secantes)



1. As secantes são PAB e PCD (A e C mais próximos de P). Trace a corda AD, formando o triângulo PAD (sombreado).
2. $B\hat{A}D$ é **ângulo externo** do triângulo PAD em A: $B\hat{A}D = \alpha + A\hat{D}P$.
3. $B\hat{A}D$ é inscrito e subtende o arco mais afastado, $\overset{\frown}{BD} = a$; logo, $B\hat{A}D = \frac{a}{2}$.
4. $A\hat{D}P = A\hat{D}C$ é inscrito e subtende o arco mais próximo, $\overset{\frown}{AC} = b$; logo, $A\hat{D}C = \frac{b}{2}$.
5. Então $\frac{a}{2} = \alpha + \frac{b}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{a-b}{2}$. ∎

Nos casos de secante e tangente e de duas tangentes, a demonstração é análoga e usa o **ângulo de segmento** (formado por tangente e corda), que também mede a metade do arco compreendido.

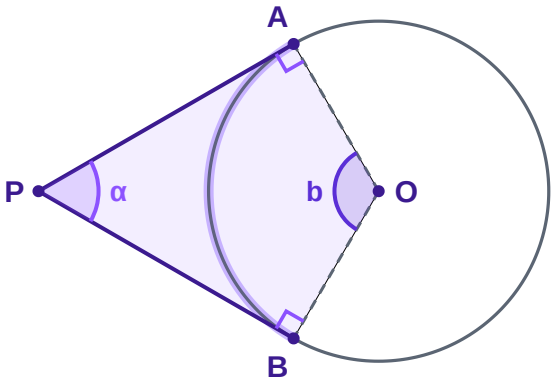
Exemplos:

- Duas secantes com arcos $120°$ (mais afastado) e $40°$ (mais próximo): $\alpha = \frac{120°-40°}{2} = 40°$.
- Secante e tangente com arcos $180°$ e $80°$: $\alpha = \frac{180°-80°}{2} = 50°$.
- Duas tangentes com arco menor $120°$ (arco maior $240°$): $\alpha = \frac{240°-120°}{2} = 60°$.

1.4 Caso especial: duas tangentes

Com duas tangentes PA e PB, os arcos a e b formam a circunferência inteira: $a + b = 360°$, isto é, $a = 360° - b$. Substituindo na fórmula:

$$\alpha = \frac{(360° - b) - b}{2} = 180° - b$$



> **CONSEQUÊNCIA**
>
> $$\alpha + b = 180°$$
>
> (o ângulo entre as tangentes e o arco menor somam $180°$)

Outra justificativa: no quadrilátero $PAOB$, os ângulos em A e B são retos, pois o raio é perpendicular à tangente. Como a soma dos ângulos do quadrilátero é $360°$, $\alpha + 90° + b + 90° = 360° \Rightarrow \alpha + b = 180°$.

Além disso, $PA = PB$ (segmentos tangentes traçados de um mesmo ponto têm a mesma medida).

ERROS COMUNS

- **Trocar soma por diferença.** Com o vértice no interior, somam-se os arcos; com o vértice no exterior, subtraem-se. Nos dois casos, divide-se por 2.
- **Escolher o arco errado.** No interior, os arcos são o do ângulo e o do seu **oposto pelo vértice** (não os vizinhos). No exterior, são os dois arcos que ficam **entre os lados** do ângulo.
- **Inverter a diferença.** No exterior, subtraia sempre o arco menor do maior.
- **Duas tangentes:** esquecer que $a + b = 360°$; muitas vezes o enunciado fornece apenas um dos arcos.

DICA

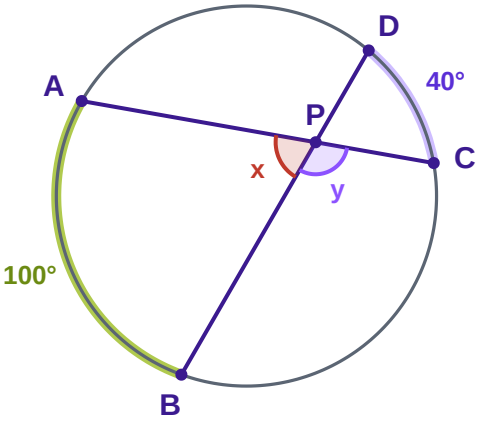
Vértice no interior: **semissoma** dos arcos. Vértice no exterior: **semidiferença** dos arcos.
Para comparar: com vértice no centro, o ângulo é igual ao arco; com vértice na circunferência, é a metade do arco.

Quadro-resumo: posição do vértice

Vértice	Nome	Medida
no centro	central	$\alpha = \overset{\frown}{AB}$
na circunferência	inscrito / de segmento	$\beta = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$
no interior (fora do centro)	excêntrico interior	$x = \dfrac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$
no exterior	excêntrico exterior	$\alpha = \dfrac{a - b}{2}$
no exterior, com duas tangentes	excêntrico exterior	$\alpha = 180° - b$

2. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exercício resolvido 1. As cordas AC e BD cortam-se em P. Sabendo que $\overset{\frown}{AB} = 100°$ e $\overset{\frown}{CD} = 40°$, calcule os ângulos $x = A\hat{P}B$ e $y = B\hat{P}C$.



Resolução:

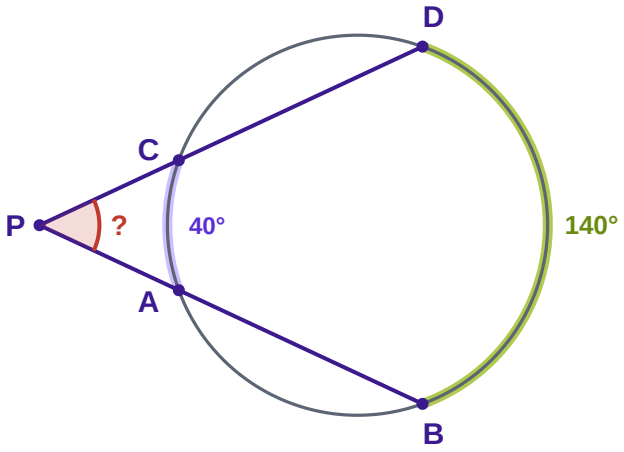
1. **Classifique.** O vértice P é interior à circunferência: o ângulo é excêntrico **interior** e mede a semissoma dos arcos.
2. **Arcos de x:** $x = A\hat{P}B$ compreende $\overset{\frown}{AB}$; seu oposto pelo vértice, $C\hat{P}D$, compreende $\overset{\frown}{CD}$.

$$x = \frac{100^\circ + 40^\circ}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$$

3. **Ângulo y:** x e y são **adjacentes suplementares** (estão sobre a reta BD): $y = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.
4. **Verificação:** os outros dois arcos somam $360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$, e $\frac{220^\circ}{2} = 110^\circ$.

Resposta: $x = 70^\circ$ e $y = 110^\circ$.

Exercício resolvido 2. De um ponto P exterior traçam-se as secantes PAB e PCD. O arco $\overset{\frown}{BD}$ (mais afastado de P) mede 140° e o arco $\overset{\frown}{AC}$ (mais próximo) mede 40°. Calcule o ângulo $B\hat{P}D$.



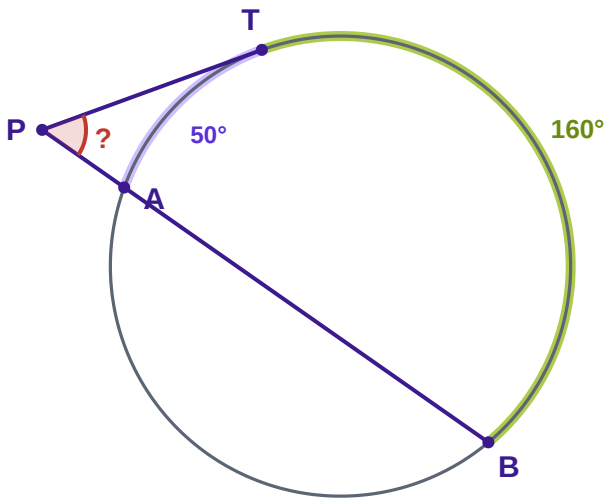
Resolução:

1. **Classifique.** P é exterior à circunferência: o ângulo é excêntrico **exterior** e mede a semidiferença dos arcos.
2. **Identifique os arcos:** arco mais afastado $a = 140^\circ$; arco mais próximo $b = 40^\circ$.

3. **Aplique:** $\alpha = \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{140^\circ - 40^\circ}{2} = \dfrac{100^\circ}{2} = 50^\circ$.

Resposta: $B\hat{P}D = 50^\circ$.

Exercício resolvido 3. De um ponto P traçam-se a tangente PT e a secante PAB (A entre P e B). Se $\overset{\frown}{TA} = 50^\circ$ e $\overset{\frown}{TB} = 160^\circ$ (arcos compreendidos pelo ângulo), calcule $T\hat{P}B$ e o arco $\overset{\frown}{AB}$ que não contém T.

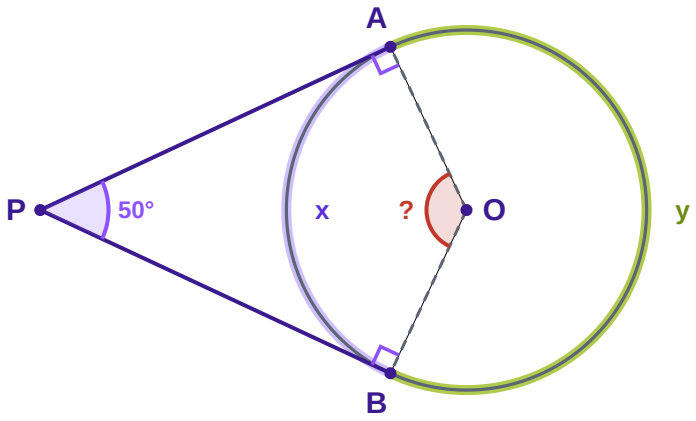


Resolução:

1. **Classifique.** O vértice é exterior e os lados são uma tangente e uma secante: ângulo excêntrico exterior.
2. **Arcos:** o arco mais afastado é $\overset{\frown}{TB} = 160^\circ$, e o mais próximo, $\overset{\frown}{TA} = 50^\circ$.
3. **Ângulo:** $T\hat{P}B = \dfrac{160^\circ - 50^\circ}{2} = \dfrac{110^\circ}{2} = 55^\circ$.
4. **Arco $\overset{\frown}{AB}$:** os três arcos $\overset{\frown}{TA}$, $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{BT}$ completam a circunferência: $\overset{\frown}{AB} = 360^\circ - 50^\circ - 160^\circ = 150^\circ$.

Resposta: $T\hat{P}B = 55^\circ$ **e** $\overset{\frown}{AB} = 150^\circ$.

Exercício resolvido 4. As retas PA e PB tangenciam a circunferência de centro O em A e B e formam um ângulo de 50°. Calcule o arco menor x, o arco maior y e o ângulo $A\hat{O}B$.

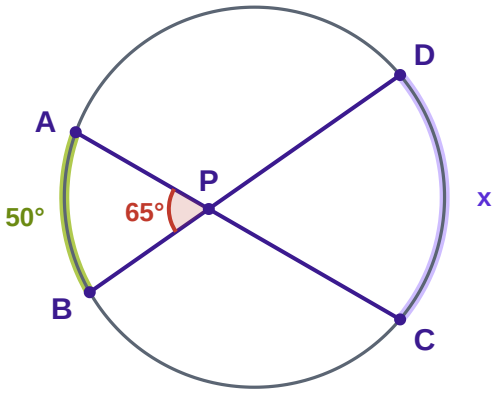


Resolução:

1. **Duas tangentes:** $\alpha + b = 180^\circ \Rightarrow 50^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow x = 130^\circ$.
2. **Arco maior:** $y = 360^\circ - 130^\circ = 230^\circ$.
3. **Verificação pela fórmula geral:** $\frac{y-x}{2} = \frac{230^\circ - 130^\circ}{2} = 50^\circ$.
4. **Ângulo central:** $A\hat{O}B$ é o ângulo central do arco menor; logo, $A\hat{O}B = 130^\circ$ (no quadrilátero $PAOB$: $50^\circ + 90^\circ + 130^\circ + 90^\circ = 360^\circ$).

Resposta: $x = 130^\circ$, $y = 230^\circ$, $A\hat{O}B = 130^\circ$.

Exercício resolvido 5. Duas cordas cortam-se num ponto interior P formando um ângulo de 65°. Um dos arcos compreendidos (por esse ângulo e por seu oposto pelo vértice) mede 50°. Quanto mede o outro?

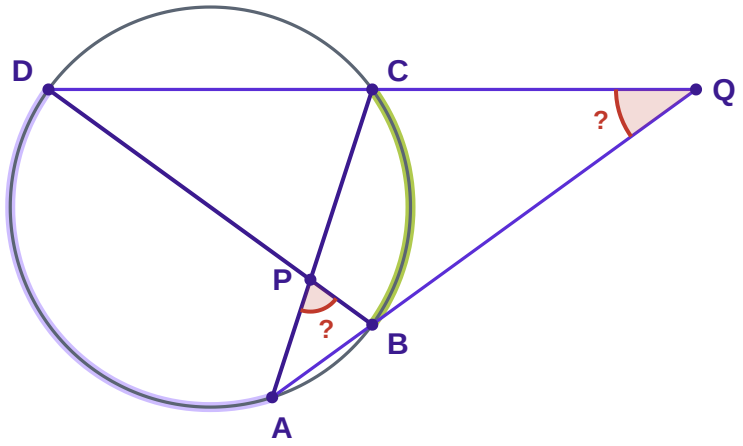


Resolução:

1. **Monte a equação** com a fórmula do interior, chamando o arco desconhecido de x: $\dfrac{50^\circ + x}{2} = 65^\circ$.
2. **Multiplique por 2:** $50^\circ + x = 130^\circ$.
3. **Isole x:** $x = 80^\circ$.

Resposta: o outro arco mede 80°.

Exercício resolvido 6. [Nível concurso] Os pontos A, B, C e D, nessa ordem, dividem uma circunferência em arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ e $\overset{\frown}{DA}$ proporcionais a 1, 2, 3 e 4. As cordas AC e BD cortam-se em P, e os prolongamentos de AB e DC encontram-se em Q. Calcule $A\hat{P}B$ e $A\hat{Q}D$.



Resolução:

1. **Calcule os arcos:** $k + 2k + 3k + 4k = 360^\circ \Rightarrow 10k = 360^\circ \Rightarrow k = 36^\circ$. Arcos: $\overset{\frown}{AB} = 36^\circ$, $\overset{\frown}{BC} = 72^\circ$, $\overset{\frown}{CD} = 108^\circ$, $\overset{\frown}{DA} = 144^\circ$.

2. $A\hat{P}B$ **(vértice interior):** compreende $\overset{\frown}{AB}$, e seu oposto pelo vértice compreende $\overset{\frown}{CD}$:

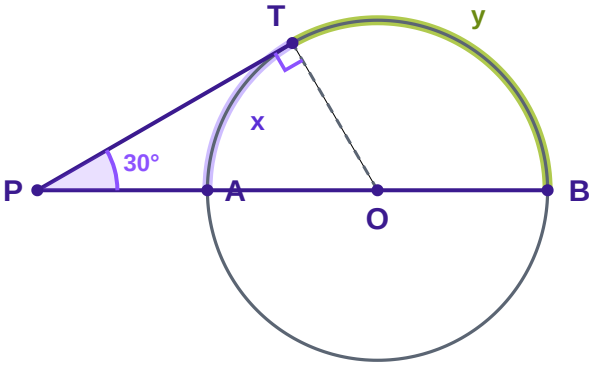
$$A\hat{P}B = \frac{36^\circ + 108^\circ}{2} = 72^\circ$$

3. $A\hat{Q}D$ **(vértice exterior):** os lados são as secantes QBA e QCD. O arco mais próximo é $\overset{\frown}{BC} = 72^\circ$ (verde), e o mais afastado, $\overset{\frown}{DA} = 144^\circ$ (lilás):

$$A\hat{Q}D = \frac{144^\circ - 72^\circ}{2} = 36^\circ$$

Resposta: $A\hat{P}B = 72^\circ$ e $A\hat{Q}D = 36^\circ$.

Exercício resolvido 7. [Nível concurso] De um ponto P traçam-se a tangente PT e a secante PAB, que passa pelo centro O (AB é diâmetro). Se $T\hat{P}B = 30^\circ$, calcule os arcos $x = \overset{\frown}{TA}$ e $y = \overset{\frown}{TB}$.



Resolução:

1. **Primeira equação (diâmetro):** T divide a semicircunferência $\overset{\frown}{AB}$ em dois arcos: $x + y = 180°$.
2. **Segunda equação (excêntrico exterior):** $\dfrac{y - x}{2} = 30° \Rightarrow y - x = 60°$.
3. **Resolva o sistema:** somando as equações, $2y = 240° \Rightarrow y = 120°$; logo $x = 60°$.
4. **Verificação pelo triângulo POT:** $O\hat{T}P = 90°$ (o raio é perpendicular à tangente); então $P\hat{O}T = 180° - 90° - 30° = 60°$, que é o ângulo central do arco $\overset{\frown}{TA}$.

Resposta: $x = 60°$ e $y = 120°$.

3. EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01 Duas cordas se cruzam no interior de uma circunferência, determinando arcos de $96°$ e $54°$ (opostos). Calcule o ângulo agudo formado pelas cordas.

02 As cordas AB e CD cortam-se em P, com $A\hat{P}C = 64°$ e $\overset{\frown}{AC} = 80°$. Calcule o arco $\overset{\frown}{BD}$.

03 Duas secantes traçadas de um ponto P exterior determinam arcos de $150°$ e $50°$. Determine o ângulo em P.

04 De um ponto P traçam-se a tangente PT e a secante PAB (A entre P e B). Sabendo que $\overset{\frown}{TB} = 140°$ e $\overset{\frown}{TA} = 40°$ (arcos compreendidos pelo ângulo), calcule $T\hat{P}B$.

05 As tangentes PA e PB formam um ângulo de $70°$. Calcule as medidas do arco menor e do arco maior $\overset{\frown}{AB}$.

06 Um ângulo excêntrico exterior mede $30°$ e o arco maior compreendido mede $100°$. Quanto mede o arco menor?

4. QUESTÕES ESTILO CONCURSO

07 Duas cordas de uma circunferência cortam-se num ponto interior formando um ângulo que compreende arcos de $70°$ e $110°$. Esse ângulo mede:

(A) $20°$
(B) $40°$
(C) $70°$
(D) $90°$
(E) $180°$

08 De um ponto exterior a uma circunferência traçam-se duas secantes que determinam arcos de $130°$ e $50°$. O ângulo formado pelas secantes mede:

(A) $40°$
(B) $50°$
(C) $65°$
(D) $80°$
(E) $90°$

09 Duas tangentes a uma circunferência, traçadas de um mesmo ponto, formam um ângulo de $60°$. O arco menor compreendido entre os pontos de tangência mede:

(A) $60°$
(B) $90°$
(C) $120°$
(D) $150°$
(E) $240°$

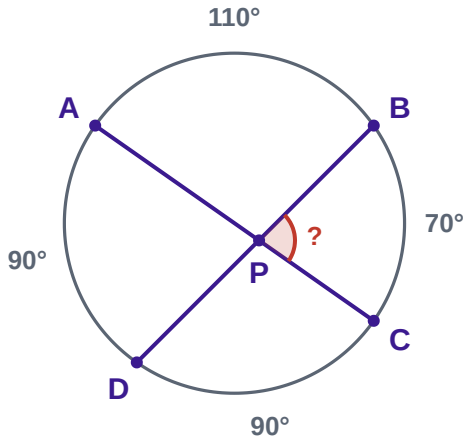
10 Um ângulo excêntrico interior mede $50°$ e os arcos que ele e seu oposto pelo vértice compreendem são tais que um é o triplo do outro. O maior desses arcos mede:

(A) $25°$
(B) $75°$
(C) $50°$
(D) $60°$
(E) $100°$

11 De um ponto P traçam-se uma tangente e uma secante a uma circunferência, formando um ângulo de $35°$. Se o arco menor compreendido mede $60°$, o arco maior mede:

(A) $70°$
(B) $95°$
(C) $110°$
(D) $120°$
(E) $130°$

12 Na figura, os pontos A, B, C e D dividem a circunferência nos arcos indicados e as cordas AC e BD cortam-se em P. A medida de $B\hat{P}C$ é:



(A) $70°$
(B) $80°$
(C) $90°$
(D) $100°$
(E) $110°$

13 [Desafio] De um ponto P exterior traçam-se as tangentes PA e PB a uma circunferência. O arco maior $\overset{\frown}{AB}$ é o quádruplo do arco menor. A medida de $A\hat{P}B$ é:

(A) 36°
(B) 54°
(C) 72°
(D) 108°
(E) 144°

5. GABARITO COMENTADO

Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.
07	D	08	A	09	C	10	B
11	E	12	B	13	D		

▼ 01 a 06 – Fixação

01. $\dfrac{96^\circ + 54^\circ}{2} = 75^\circ$.

02. $\dfrac{80^\circ + x}{2} = 64^\circ \Rightarrow x = 48^\circ$.

03. $\dfrac{150^\circ - 50^\circ}{2} = 50^\circ$.

04. $\dfrac{140^\circ - 40^\circ}{2} = 50^\circ$.

05. Arco menor $= 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$; arco maior $= 360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$. Verificação: $\frac{250-110}{2} = 70$.

06. $\dfrac{100^\circ - x}{2} = 30^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$.

▼ 07 a 13 – Estilo concurso

07 (D). $\dfrac{70^\circ + 110^\circ}{2} = 90^\circ$.

08 (A). $\dfrac{130^\circ - 50^\circ}{2} = 40^\circ$.

09 (C). $\alpha + b = 180^\circ \Rightarrow b = 120^\circ$.

10 (B). $\dfrac{3x + x}{2} = 50^\circ \Rightarrow x = 25^\circ$; maior $= 75^\circ$.

11 (E). $\dfrac{a - 60^\circ}{2} = 35^\circ \Rightarrow a = 130^\circ$.

12 (B). $B\hat{P}C$ compreende $\overset{\frown}{BC} = 70^\circ$, e seu oposto pelo vértice, $A\hat{P}D$, compreende $\overset{\frown}{DA} = 90^\circ$: $\dfrac{70^\circ + 90^\circ}{2} = 80^\circ$.

13 (D). $b + 4b = 360^\circ \Rightarrow b = 72^\circ$, $a = 288^\circ$. $\alpha = \dfrac{288^\circ - 72^\circ}{2} = 108^\circ$ (ou $180^\circ - 72^\circ$).