FICHA DE MATEMÁTICA

Circunferência

Ângulos central, inscrito e de segmento

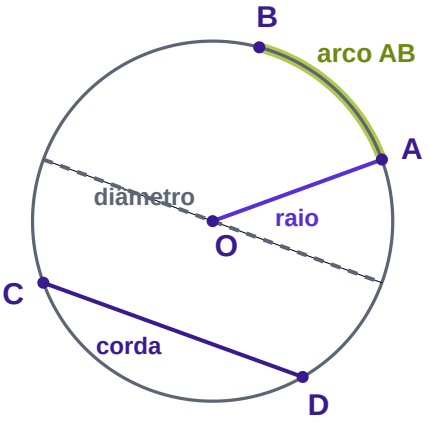
Aluno(a): _____ | **Data:** ___/___/___ | **Prof.:** Luis Teixeira

1. TEORIA

1.1 Elementos da circunferência

Antes do estudo dos ângulos, convém fixar os nomes dos elementos da circunferência, usados em todas as questões.

- **Centro (O)**: ponto que está à mesma distância de todos os pontos da circunferência.
- **Raio (r)**: segmento que liga o centro a um ponto da circunferência. *Todos os raios têm a mesma medida*; por isso, dois raios e a corda que une suas extremidades formam um **triângulo isósceles**, fato usado em muitas questões.
- **Corda**: segmento que liga dois pontos da circunferência.
- **Diâmetro**: corda que passa pelo centro ($d = 2r$). É a maior corda.
- **Arco**: cada uma das duas partes da circunferência determinadas por dois pontos.



MEDIDA ANGULAR DE UM ARCO

A medida de um arco, em graus, é a medida do **ângulo central** que o determina. A circunferência inteira mede 360° e uma semicircunferência mede 180°. Indicamos a medida do arco por $\overset{\frown}{AB}$. Dois pontos A e B determinam dois arcos, e

$$\overset{\frown}{AB}_{\text{menor}} + \overset{\frown}{AB}_{\text{maior}} = 360^\circ.$$

Exemplo: se o arco menor $\overset{\frown}{AB}$ mede 70°, o arco maior mede $360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$.

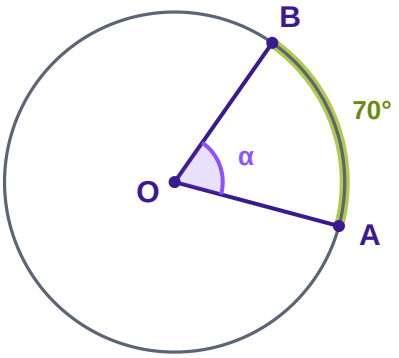
ATENÇÃO

A medida do arco em **graus** não é o seu **comprimento** (em cm). Dois arcos de 60° em circunferências de raios diferentes têm a mesma medida angular, mas comprimentos diferentes. Nesta ficha trabalhamos sempre com a medida em graus.

1.2 Ângulo central

DEFINIÇÃO

Ângulo central é aquele que tem o **vértice no centro** da circunferência. Seus lados são dois raios.



PROPRIEDADE

O ângulo central tem a **mesma medida** do arco que ele determina:

$$\alpha = \overset{\frown}{AB}$$

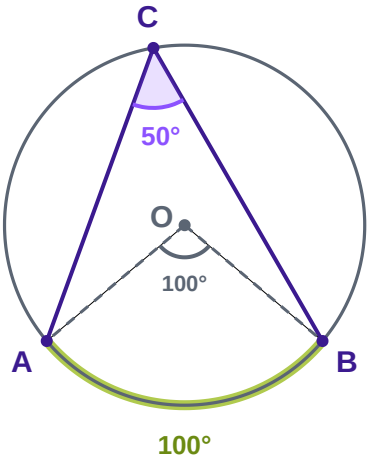
Essa igualdade não é um teorema: decorre da própria **definição** de medida de arco. Na figura, $\alpha = 70°$ porque o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede $70°$.

Exemplo: um relógio tem 12 marcações igualmente espaçadas. O ângulo central entre duas marcações vizinhas é $360° \div 12 = 30°$. Às 4h, os ponteiros formam $4 \cdot 30° = 120°$.

1.3 Ângulo inscrito

DEFINIÇÃO

Ângulo inscrito é aquele que tem o **vértice sobre a circunferência** e cujos lados são duas **cordas**. O arco situado entre os lados do ângulo (e que não contém o vértice) é o **arco compreendido**.



TEOREMA DO ÂNGULO INSCRITO

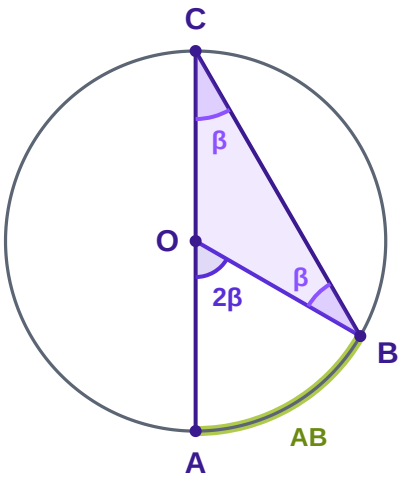
O ângulo inscrito mede a **metade** do arco compreendido:

$$\beta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

De modo equivalente: o ângulo inscrito mede a metade do ângulo central que subtende o mesmo arco.

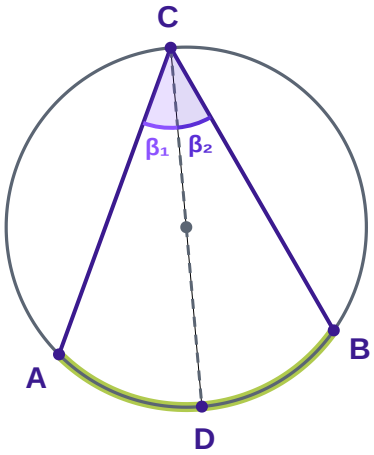
Demonstração do teorema do ângulo inscrito

Demonstra-se primeiro o caso em que um dos lados do ângulo passa pelo centro; os demais casos se reduzem a este.

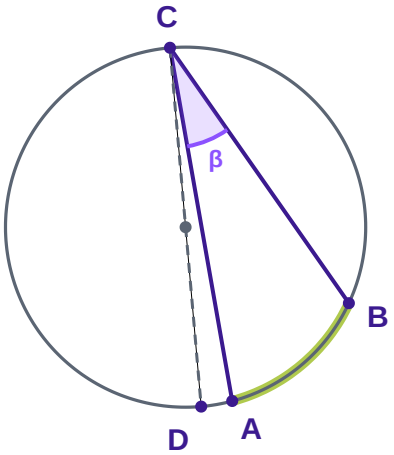


1. Seja $\beta = A\hat{C}B$, com CA diâmetro (passa por O). Ligue O a B.
2. $OC = OB$ (são raios), logo o triângulo OBC é **isósceles** e seus ângulos da base são iguais: $O\hat{B}C = O\hat{C}B = \beta$.
3. $B\hat{O}A$ é **ângulo externo** do triângulo OBC. O ângulo externo é igual à soma dos dois internos não adjacentes: $B\hat{O}A = \beta + \beta = 2\beta$.
4. Mas $B\hat{O}A$ é central, então $B\hat{O}A = \overset{\frown}{AB}$. Logo, $2\beta = \overset{\frown}{AB}$ e, portanto, $\beta = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$. ∎

Outros casos. Se o centro não pertence a um dos lados, traça-se o diâmetro CD com extremidade no vértice e aplica-se o caso anterior duas vezes: se O está **dentro** do ângulo, $\beta = \beta_1 + \beta_2 = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{DB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$; se O está **fora**, $\beta = \beta_1 - \beta_2$ e o resultado é o mesmo.



O dentro do ângulo: β = β₁ + β₂



O fora do ângulo: β = β₁ − β₂

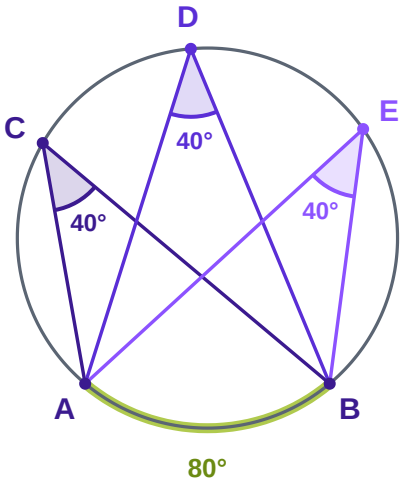
Exemplo: um ângulo inscrito que subtende um arco de $100°$ mede $50°$. Reciprocamente, um ângulo inscrito de $35°$ subtende um arco de $70°$.

ERROS COMUNS

- Usar o arco errado: o arco compreendido é o que fica **entre os lados** do ângulo, e não o arco que contém o vértice.
- Dobrar em vez de dividir: o ângulo central é igual ao arco, e o inscrito, à metade dele. Logo, quando subtendem o mesmo arco, o central é o dobro do inscrito.
- Esquecer que $360°$ é a volta completa: para obter o arco restante, subtraia de $360°$, e não de $180°$.

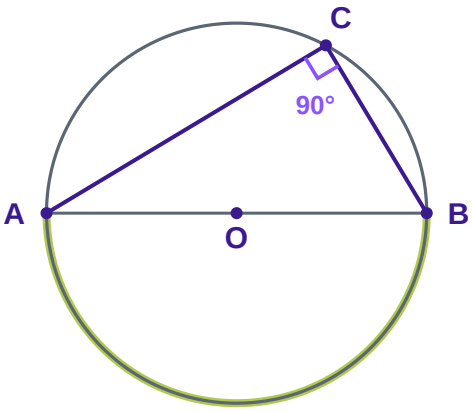
1.4 Consequências importantes do ângulo inscrito

a) Ângulos inscritos que subtendem o mesmo arco são congruentes. Todos medem a metade desse arco. Na figura, $\overset{\frown}{AB} = 80°$, então $A\hat{C}B = A\hat{D}B = A\hat{E}B = 40°$, qualquer que seja a posição de C, D ou E no arco maior.



b) Ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto. Se AB é diâmetro, o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede $180°$; então qualquer ângulo $A\hat{C}B$, com C na circunferência, mede $\frac{180°}{2} = 90°$.

Consequência (teorema de Tales da circunferência): **todo triângulo inscrito que tem um lado igual ao diâmetro é retângulo**, e esse lado é a hipotenusa. Nesse caso, pode-se aplicar o teorema de Pitágoras.

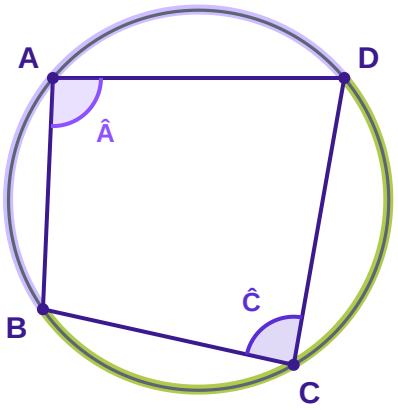


c) Quadrilátero inscrito: ângulos opostos são suplementares.

Em $ABCD$ inscrito, $\hat{A}$ subtende o arco $\overset{\frown}{BCD}$ e $\hat{C}$ subtende o arco $\overset{\frown}{DAB}$. Juntos, esses dois arcos formam a circunferência inteira:

$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{DAB}}{2} = \frac{360°}{2} = 180°.$$

Da mesma forma, $\hat{B} + \hat{D} = 180°$. A recíproca também vale: se os ângulos opostos de um quadrilátero são suplementares, ele é **inscritível**.



Exemplo: em um quadrilátero inscrito, se $\hat{A} = 115°$, então $\hat{C} = 65°$. A propriedade **não** vale para ângulos consecutivos: $\hat{A} + \hat{B}$ não é necessariamente $180°$.

1.5 Ângulo de segmento (semi-inscrito)

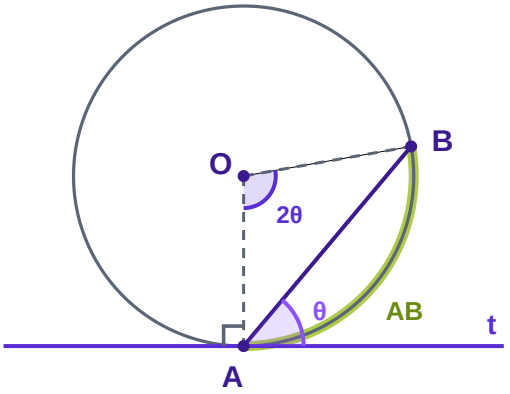
DEFINIÇÃO

É o ângulo com vértice **sobre a circunferência**, formado por uma **corda** e uma **reta tangente** no mesmo ponto.

PROPRIEDADE

Mede a **metade** do arco compreendido, como o ângulo inscrito:

$$\theta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$



Justificativa:

1. A tangente é **perpendicular ao raio** no ponto de tangência: $O\hat{A}t = 90°$. Então $O\hat{A}B = 90° - \theta$.
2. O triângulo OAB é isósceles ($OA = OB$), logo $O\hat{B}A = 90° - \theta$ também.
3. Soma dos ângulos do triângulo: $A\hat{O}B = 180° - 2(90° - \theta) = 2\theta$.
4. Como $A\hat{O}B$ é central, $\overset{\frown}{AB} = 2\theta$, isto é, $\theta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$. ∎

Exemplo: se uma tangente e uma corda formam $40°$, o arco compreendido mede $80°$, assim como o ângulo central correspondente.

DICA

Observe primeiro a **posição do vértice**:

- no **centro**: o ângulo é igual ao arco;
- **sobre** a circunferência (inscrito ou de segmento): o ângulo é a metade do arco.

Quando aparecerem dois raios, procure o **triângulo isósceles** que eles formam.

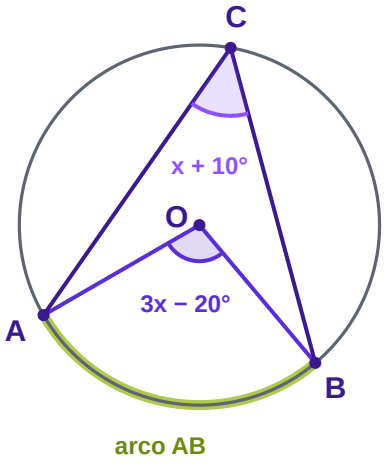
Quadro-resumo

Ângulo	Vértice	Lados	Medida
Central	centro	dois raios	$\alpha = \overset{\frown}{AB}$
Inscrito	na circunferência	duas cordas	$\beta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$
De segmento	na circunferência	corda e tangente	$\theta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$
Inscrito na semicircunferência	na circunferência	cordas até o diâmetro	$90°$

Quadrilátero inscrito	ângulos opostos	$\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=180^\circ$

2. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exercício resolvido 1. Na figura, o ângulo central $A\hat{O}B$ mede $3x-20^\circ$ e o ângulo inscrito $A\hat{C}B$ mede $x+10^\circ$. Calcule x e as medidas dos dois ângulos.



Resolução:

1. **Identifique os ângulos.** $A\hat{O}B$ tem vértice no centro (central); $A\hat{C}B$ tem vértice na circunferência (inscrito). Os dois subtendem o **mesmo arco** $\overset{\frown}{AB}$.
2. **Relacione.** O ângulo central é igual ao arco, e o inscrito é a metade dele; logo, o central é o dobro do inscrito:

$$3x-20^\circ=2(x+10^\circ)$$

3. **Resolva.** $3x-20=2x+20 \Rightarrow x=40^\circ$.
4. **Substitua.** $A\hat{O}B=3\cdot 40-20=100^\circ$ e $A\hat{C}B=40+10=50^\circ$. Verificação: $100=2\cdot 50$.

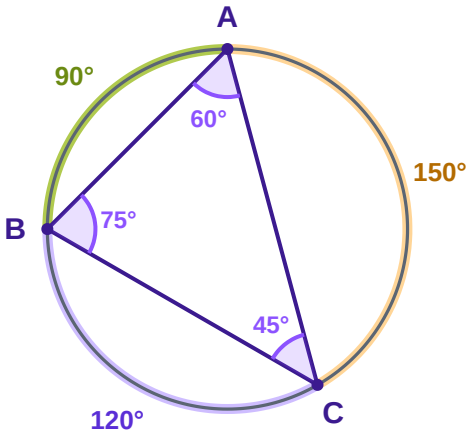
Resposta: $x=40^\circ$; $A\hat{O}B=100^\circ$ **e** $A\hat{C}B=50^\circ$.

Exercício resolvido 2. Os pontos A, B e C dividem uma circunferência em três arcos, $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{CA}$, proporcionais a 3, 4 e 5. Determine os ângulos internos do triângulo ABC.

Resolução:

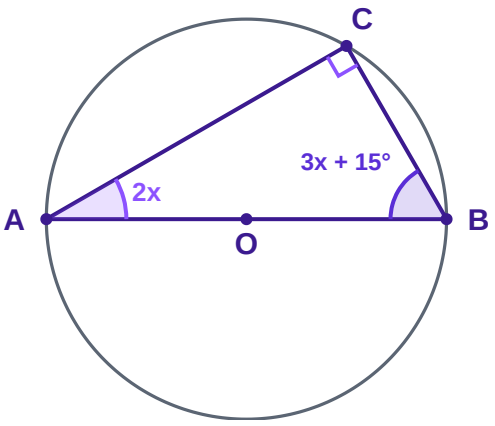
1. **Arcos proporcionais** a 3, 4 e 5: $\overset{\frown}{AB}=3k$, $\overset{\frown}{BC}=4k$, $\overset{\frown}{CA}=5k$.
2. **Volta inteira:** $3k+4k+5k=360^\circ \Rightarrow 12k=360^\circ \Rightarrow k=30^\circ$. Arcos: 90°, 120° e 150°.
3. **Cada ângulo do triângulo é inscrito** e subtende o arco **oposto** a ele (o arco entre os outros dois vértices):
   - $\hat{A}$ subtende $\overset{\frown}{BC}$: $\hat{A}=120^\circ/2=60^\circ$;
   - $\hat{B}$ subtende $\overset{\frown}{CA}$: $\hat{B}=150^\circ/2=75^\circ$;
   - $\hat{C}$ subtende $\overset{\frown}{AB}$: $\hat{C}=90^\circ/2=45^\circ$.

4. **Verificação:** $60° + 75° + 45° = 180°$, como deveria ser, pois a soma dos arcos é $360°$.



Resposta: $\hat{A} = 60°$, $\hat{B} = 75°$, $\hat{C} = 45°$.

Exercício resolvido 3. AB é um diâmetro e C é um ponto da circunferência. Os ângulos $C\hat{A}B$ e $C\hat{B}A$ medem $2x$ e $3x + 15°$. Determine os ângulos. Se $AB = 10$ cm, quanto mede AC?

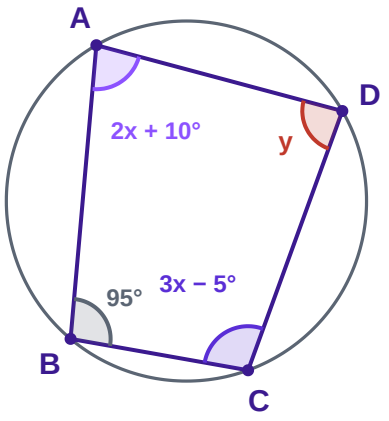


Resolução:

1. **Ângulo reto:** como AB é diâmetro, $A\hat{C}B$ está inscrito numa semicircunferência; logo, $A\hat{C}B = 90°$.
2. **Soma dos ângulos do triângulo:** $2x + (3x + 15°) + 90° = 180° \Rightarrow 5x = 75° \Rightarrow x = 15°$.
3. $C\hat{A}B = 30°$ e $C\hat{B}A = 60°$.
4. **Lado AC:** no triângulo retângulo, AC é o cateto adjacente a $\hat{A}$: $AC = AB \cdot \cos 30° = 10 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ cm. (Ou: BC é oposto a $30°$, logo $BC = \frac{AB}{2} = 5$, e por Pitágoras $AC = \sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{3}$.)

Resposta: $30°$, $60°$ e $90°$; $AC = 5\sqrt{3}$ cm $\approx 8{,}66$ cm.

Exercício resolvido 4. O quadrilátero $ABCD$ está inscrito numa circunferência, com $\hat{A} = 2x + 10°$, $\hat{C} = 3x - 5°$ e $\hat{B} = 95°$. Calcule x, $\hat{A}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$.

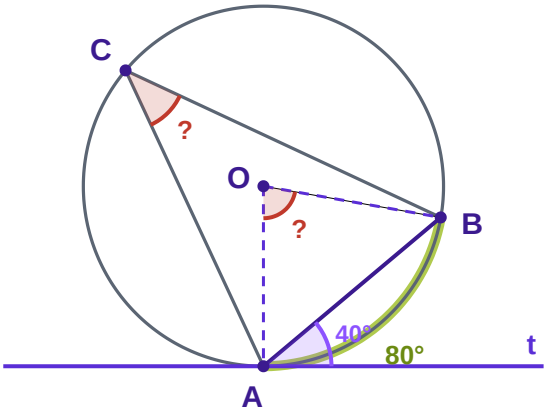


Resolução:

1. **Propriedade:** em quadrilátero inscrito, ângulos **opostos** somam $180°$. A e C são opostos; B e D também.
2. $\hat{A} + \hat{C} = 180° \Rightarrow (2x + 10) + (3x - 5) = 180 \Rightarrow 5x + 5 = 180 \Rightarrow x = 35°$.
3. $\hat{A} = 2 \cdot 35 + 10 = 80°$ e $\hat{C} = 3 \cdot 35 - 5 = 100°$.
4. $\hat{B} + \hat{D} = 180° \Rightarrow \hat{D} = 180° - 95° = 85°$.
5. **Verificação:** $80 + 95 + 100 + 85 = 360°$, que é a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero.

Resposta: $x = 35°$; $\hat{A} = 80°$, $\hat{C} = 100°$, $\hat{D} = 85°$.

Exercício resolvido 5. A reta t é tangente à circunferência em A, e a corda AB forma com t um ângulo de $40°$. Sendo C um ponto do arco maior $\overset{\frown}{AB}$, calcule: a) o arco $\overset{\frown}{AB}$; b) o ângulo central $A\hat{O}B$; c) o ângulo $A\hat{C}B$; d) o ângulo $O\hat{A}B$.



Resolução:

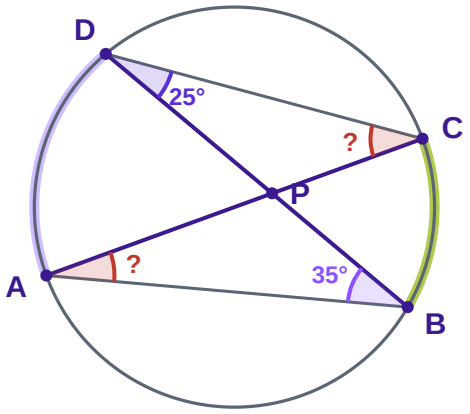
1. **a)** O ângulo entre tangente e corda é **de segmento**: mede metade do arco compreendido. $40° = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 80°$.
2. **b)** O ângulo central é igual ao arco: $A\hat{O}B = 80°$.

3 **c)** $A\hat{C}B$ é inscrito e subtende o mesmo arco de $80°$; logo, $A\hat{C}B = 40°$. Assim, o ângulo de segmento é igual ao ângulo inscrito que subtende o mesmo arco.

4 **d)** No triângulo isósceles OAB ($OA = OB$): $O\hat{A}B = \dfrac{180° - 80°}{2} = 50°$. Outra forma: como o raio é perpendicular à tangente, $O\hat{A}B = 90° - 40° = 50°$.

Resposta: a) $80°$; **b)** $80°$; **c)** $40°$; **d)** $50°$.

Exercício resolvido 6. Os pontos A, B, C e D estão nessa ordem sobre uma circunferência, e as cordas AC e BD cortam-se em P. Sabendo que $A\hat{B}D = 35°$ e $B\hat{D}C = 25°$, calcule $A\hat{C}D$, $B\hat{A}C$ e $A\hat{P}B$.



Resolução:

1 $A\hat{C}D$: $A\hat{B}D$ e $A\hat{C}D$ são inscritos e subtendem o **mesmo arco** $\overset{\frown}{AD}$ (arco lilás). Logo, $A\hat{C}D = A\hat{B}D = 35°$ (e $\overset{\frown}{AD} = 70°$).

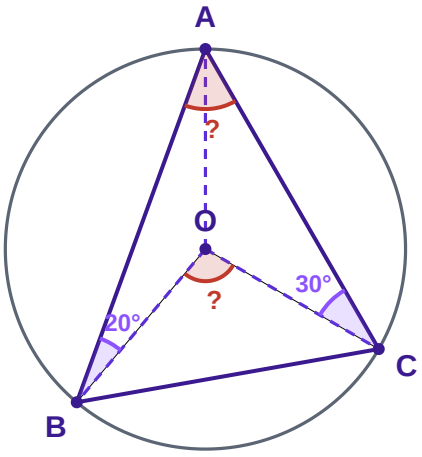
2 $B\hat{A}C$: $B\hat{D}C$ e $B\hat{A}C$ subtendem o mesmo arco $\overset{\frown}{BC}$ (arco verde). Logo, $B\hat{A}C = B\hat{D}C = 25°$ (e $\overset{\frown}{BC} = 50°$).

3 $A\hat{P}B$: no triângulo ABP, conhecemos $P\hat{A}B = 25°$ e $A\hat{B}P = 35°$. Então $A\hat{P}B = 180° - 25° - 35° = 120°$.

Resposta: $A\hat{C}D = 35°$, $B\hat{A}C = 25°$, $A\hat{P}B = 120°$.

Observação: $A\hat{P}B$ é um ângulo com vértice **dentro** da circunferência (excêntrico interior), assunto da ficha de ângulos excêntricos.

Exercício resolvido 7. [Nível concurso] O triângulo ABC está inscrito numa circunferência de centro O (com O no interior do triângulo). Sabe-se que $O\hat{B}A = 20°$ e $O\hat{C}A = 30°$. Determine $B\hat{A}C$, $B\hat{O}C$ e $O\hat{B}C$.

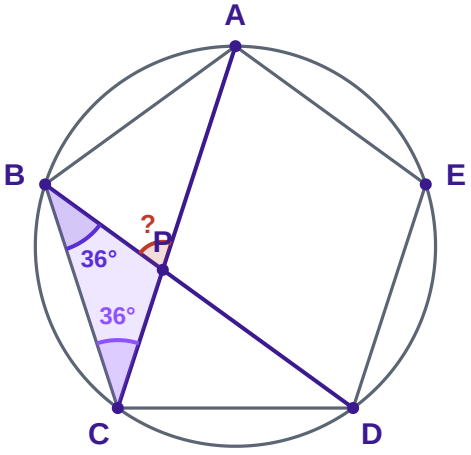


Resolução:

1. **Ligue O aos três vértices.** $OA = OB = OC$ (raios) ⇒ os triângulos OAB, OAC e OBC são **isósceles**.
2. Em OAB: $O\hat{A}B = O\hat{B}A = 20°$. Em OAC: $O\hat{A}C = O\hat{C}A = 30°$.
3. Como O está no interior do ângulo $\hat{A}$, $B\hat{A}C = O\hat{A}B + O\hat{A}C = 20° + 30° = 50°$.
4. $B\hat{O}C$ é central e subtende o mesmo arco $\overset{\frown}{BC}$ que o inscrito $B\hat{A}C$ ⇒ $B\hat{O}C = 2 \cdot 50° = 100°$.
5. No isósceles OBC: $O\hat{B}C = \dfrac{180° - 100°}{2} = 40°$.

Resposta: $B\hat{A}C = 50°$, $B\hat{O}C = 100°$, $O\hat{B}C = 40°$.

Exercício resolvido 8. [Nível concurso] $ABCDE$ é um pentágono regular inscrito numa circunferência. As diagonais AC e BD cortam-se em P. Calcule $A\hat{P}B$.



Resolução:

1. **Arcos iguais:** os 5 lados iguais determinam 5 arcos iguais: $360° \div 5 = 72°$ cada.
2. $A\hat{C}B$ é inscrito e subtende $\overset{\frown}{AB} = 72°$ ⇒ $A\hat{C}B = 36°$.
3. $C\hat{B}D$ é inscrito e subtende $\overset{\frown}{CD} = 72°$ ⇒ $C\hat{B}D = 36°$.

4. No triângulo PBC (sombreado): $B\hat{P}C = 180° - 36° - 36° = 108°$.
5. $A\hat{P}B$ e $B\hat{P}C$ são **suplementares** (formam um ângulo raso sobre a reta AC): $A\hat{P}B = 180° - 108° = 72°$.

Resposta: $A\hat{P}B = 72°$.

3. EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01 Um ângulo central mede $80°$. Quanto mede o arco correspondente? E um ângulo inscrito que subtende esse mesmo arco?

02 Calcule a medida de um ângulo inscrito que determina na circunferência um arco de $130°$.

03 Os pontos A, B e C dividem uma circunferência em arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{CA}$ proporcionais a 2, 3 e 4. Determine os ângulos internos do triângulo ABC.

04 $ABCD$ é um quadrilátero inscrito.
a) Se $\hat{B} = 110°$, quanto mede $\hat{D}$?
b) Se $\hat{A}$ é o dobro de $\hat{C}$, calcule $\hat{A}$ e $\hat{C}$.

05 Uma tangente e uma corda com extremidade no ponto de tangência formam um ângulo de $52°$. Determine o arco compreendido e a medida de um ângulo inscrito que subtende esse arco.

06 AB é diâmetro de uma circunferência e C é um ponto dela, distinto de A e B. Se $AC = 6$ cm e $BC = 8$ cm, calcule o raio da circunferência.

4. QUESTÕES DE CONCURSOS MILITARES

Questões oficiais de provas anteriores (EFOMM, EPCAR, EsPCEx, AFA e Escola Naval), selecionadas do banco de questões da Trilha Militares.

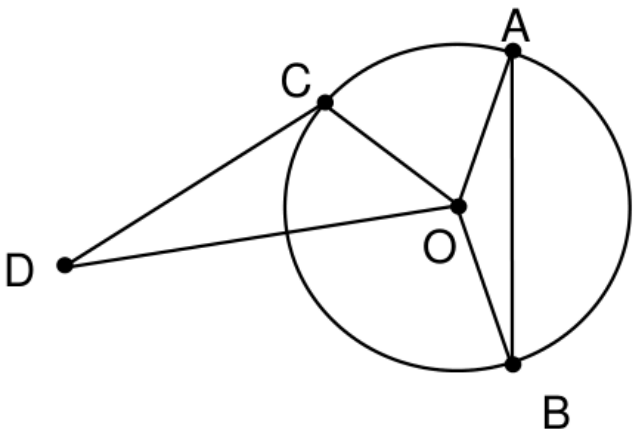
07 [EsPCEx 2023]

Em um polígono regular ABCDEFG..., as interseções da mediatriz relativa ao lado CD com a bissetriz interna relativa ao vértice A e com o lado CD são, respectivamente, os pontos O_1 e M_1. Sabendo que o ângulo $A\hat{O}_1M_1$ é igual a 75° e que o lado BC está contido no interior do ângulo $A\hat{O}_1M_1$, o número de diagonais do polígono ABCDEFG... é igual a:

(A) 35
(B) 44
(C) 54
(D) 65
(E) 77

08 [EFOMM 2016]

Determine o comprimento do menor arco AB na circunferência de centro O, representada na figura a seguir, sabendo que o segmento OD mede 12 cm, os ângulos CÔD = 30° e OÂB = 15° e que a área do triângulo CDO é igual a 18 cm².



(A) 5π cm
(B) 12 cm
(C) 5 cm
(D) 12π cm
(E) 10π cm

09 [EPCAR 2026]

Considere um triângulo ABC inscrito em uma circunferência de centro O, raio r cm e que possui um segmento de reta que parte do vértice A, passa por O e intercepta o lado $\overline{BC}$ em P

O lado $\overline{AC}$ mede $r\sqrt{3}$ cm, e o ângulo $B\hat{A}P$ mede 15°

Analise as afirmativas abaixo e assinale a alternativa correta.

I. O triângulo APC é isósceles.

II. O ângulo $A\hat{P}B$ mede 120°

III. A altura do triângulo ABP em relação ao lado AP mede $\frac{r}{2}$

(A) nenhuma afirmativa correta.
(B) apenas uma afirmativa correta.
(C) apenas duas afirmativas corretas.
(D) todas as afirmativas corretas.

10 [EFOMM 2020]

Seja ABC um triângulo inscrito em uma circunferência de centro O. Sejam O' e E o incentro do triângulo ABC e o ponto médio do arco BC que não contém o ponto A, respectivamente. Assinale a opção que apresenta a relação entre os segmentos EB, EO' e EC.

(A) $EB = EO' = EC$
(B) $EB < EO' = EC$
(C) $EB > EO' > EC$
(D) $EB = EO' > EC$
(E) $EB < EO' < EC$

5. GABARITO COMENTADO

Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.
07	C	08	A	09	C	10	A

▼ 01 a 06 – Fixação

01. Arco $= 80^\circ$; inscrito $= 40^\circ$.

02. $130^\circ/2 = 65^\circ$.

03. $2k + 3k + 4k = 360^\circ \Rightarrow k = 40^\circ$: arcos 80°, 120° e 160°. Cada ângulo mede metade do arco oposto: $\hat{C} = 40^\circ$ (oposto a $\overset{\frown}{AB}$), $\hat{A} = 60^\circ$ (oposto a $\overset{\frown}{BC}$), $\hat{B} = 80^\circ$ (oposto a $\overset{\frown}{CA}$).

04. a) $\hat{D} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$. b) $2\hat{C} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 60^\circ$ e $\hat{A} = 120^\circ$.

05. Arco $= 2 \cdot 52^\circ = 104^\circ$; inscrito $= 52^\circ$.

06. $\hat{C} = 90^\circ \Rightarrow AB^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow AB = 10$ cm $\Rightarrow$ raio $= 5$ cm.

▼ 07 a 10 – Concursos militares

07 (C) · EsPCEx 2023.

No polígono regular, a mediatriz de um lado e a bissetriz de um ângulo interno passam pelo centro: O_1 é o centro e M_1 o ponto médio de CD.

De A até M_1 há dois lados e meio (AB, BC e meio CD), cada lado correspondendo ao ângulo central $\frac{360^\circ}{n}$:

$$2{,}5 \cdot \frac{360^\circ}{n} = 75^\circ \;\Rightarrow\; n = 12 \qquad d = \frac{12 \cdot 9}{2} = 54$$

08 (A) · EFOMM 2016.

Área de CDO com o ângulo em O:

$$18 = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot 12 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = 3\,OC \;\Rightarrow\; OC = r = 6 \text{ cm}$$

OAB é isósceles ($OA = OB = r$) com ângulos da base de 15°, então $A\hat{O}B = 150^\circ$:

$$\ell = \frac{150}{360} \cdot 2\pi \cdot 6 = 5\pi \text{ cm}$$

09 (C) · EPCAR 2026.

No triângulo isósceles AOC ($OA = OC = r$, $AC = r\sqrt{3}$), os ângulos da base medem 30°: $O\hat{A}C = 30^\circ$. A corda AC subentende um arco de 120°, e o ângulo inscrito $A\hat{B}C$ mede 60°.

Então $B\hat{A}C = 15^\circ + 30^\circ = 45^\circ$ e $A\hat{C}B = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$.

I: no triângulo APC, $P\hat{A}C = 30^\circ$ e $A\hat{C}P = 75^\circ$, logo $A\hat{P}C = 75^\circ$: isósceles, com $AP = AC$. Verdadeira.

II: $A\hat{P}B = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$. Falsa.

III: a distância de B à reta AP é $AB \operatorname{sen} 15^\circ$, e pela lei dos senos $AB = 2r \operatorname{sen} 75^\circ$. Como $\operatorname{sen} 75^\circ \operatorname{sen} 15^\circ = \cos 15^\circ \operatorname{sen} 15^\circ = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{4}$, a altura é $\frac{r}{2}$. Verdadeira.

10 (A) · EFOMM 2020.

Como E é o ponto médio do arco BC, $EB = EC$ e AE é a bissetriz de $\hat{A}$ (passa por O').

No triângulo $BO'E$: $\angle EBO' = \frac{\hat{B}}{2} + \angle EBC = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{A}}{2}$ e $\angle BO'E$ (ângulo externo de ABO') $= \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2}$. Os ângulos são iguais, então $EB = EO'$.

Logo $EB = EO' = EC$ (teorema do incentro/excentro).
