PROF. LUIS TEIXEIRA
Física | Matemática

FICHA DE FÍSICA

Acústica

Efeito Doppler

Aluno(a): _____ | **Data:** ___/___/____ | **Prof.:** Luis Teixeira

1. TEORIA

1.1 O fenômeno

Quando uma ambulância passa por nós com a sirene ligada, o som é mais agudo enquanto ela se aproxima e fica mais grave, de forma bem perceptível, no instante em que ela passa e começa a se afastar. A sirene emite sempre a mesma frequência; o que muda é a frequência que chega ao ouvido. Essa diferença entre a frequência emitida e a frequência percebida, causada pelo movimento da fonte ou do observador, é o **efeito Doppler**, descrito pelo físico austríaco Christian Doppler em 1842. Em 1845, Buys Ballot confirmou o efeito para o som colocando músicos num trem em movimento e outros parados ao lado da linha, que comparavam a altura das notas.

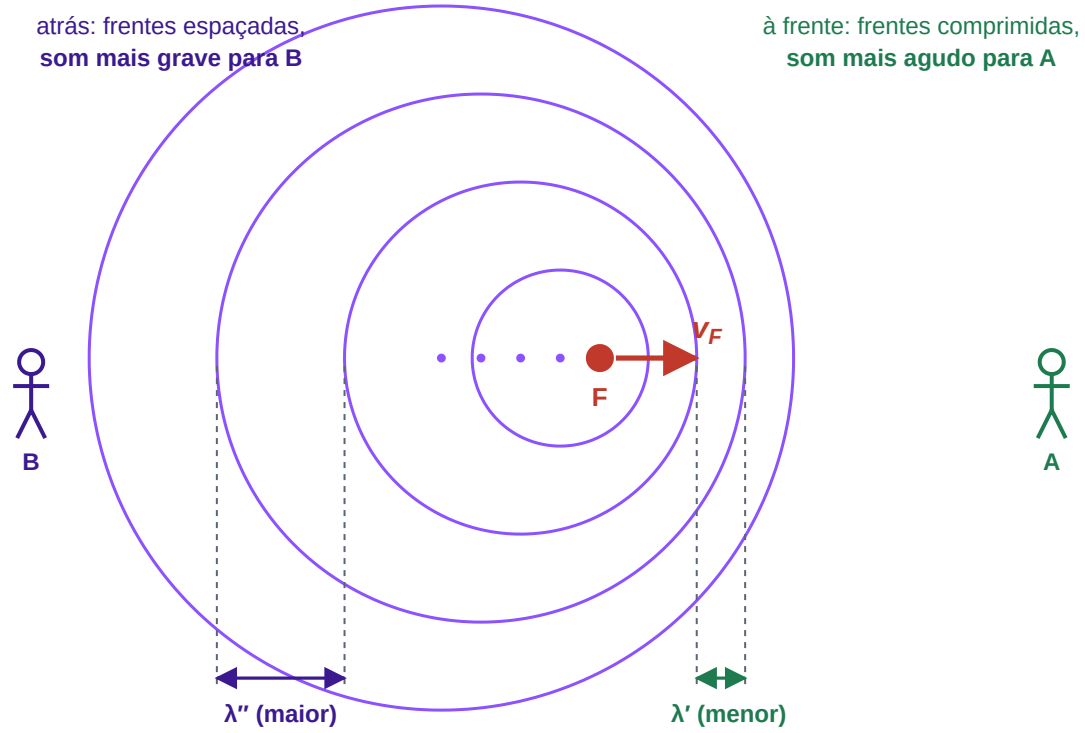
> **DEFINIÇÃO**
>
> **Efeito Doppler** é a alteração da frequência percebida de uma onda devida ao movimento relativo entre a fonte e o observador. Na aproximação, a frequência percebida é **maior** que a emitida (som mais agudo); no afastamento, é **menor** (som mais grave).

O efeito vale para qualquer onda: som, ondas na superfície da água, luz e ondas de rádio. Nesta ficha o foco é o som. A velocidade do som, a relação $v = \lambda f$ e os batimentos foram estudados na ficha *Natureza e propriedades do som*; os harmônicos de cordas e tubos, que aparecem em algumas questões, estão na ficha *Cordas vibrantes e tubos sonoros*.

Ao longo da ficha, f é a frequência emitida pela fonte, f' a frequência percebida, v a velocidade do som no ar (em relação ao ar), v_F a velocidade da fonte e v_O a do observador.

1.2 Fonte em movimento

Uma fonte parada emite frentes de onda esféricas e concêntricas, separadas por um comprimento de onda $\lambda = v/f$. Se a fonte se move, cada frente continua sendo uma esfera centrada no **ponto onde a fonte estava quando a emitiu**, e sua velocidade de propagação é a mesma de antes, pois depende só do meio. Como os centros vão ficando para trás, as frentes ficam comprimidas à frente da fonte e espaçadas atrás dela.



Frentes emitidas por uma fonte que se move para a direita com $v_F = 0{,}45\,v$. Cada círculo tem centro no ponto onde a fonte estava ao emiti-lo (pontos à esquerda de F).

Dedução. Seja $T = 1/f$ o período da fonte. Entre a emissão de duas frentes consecutivas, a primeira percorre vT e a fonte avança $v_F T$ no mesmo sentido. A distância entre as duas frentes, à frente da fonte, é

$$\lambda' = vT - v_F T = \frac{v - v_F}{f}.$$

O observador A, parado à frente, recebe essas frentes com a velocidade normal do som, v. A frequência que ele percebe é

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = f\,\frac{v}{v - v_F} \qquad (\text{fonte se aproximando}).$$

Atrás da fonte, as frentes ficam separadas por $\lambda'' = (v + v_F)/f$, e o observador B percebe

$$f'' = f\,\frac{v}{v + v_F} \qquad (\text{fonte se afastando}).$$

Com a fonte em movimento, o comprimento de onda muda de fato no ar: quem estiver à frente encontra ondas mais curtas, e quem estiver atrás, ondas mais longas. A velocidade do som no ar continua a mesma.

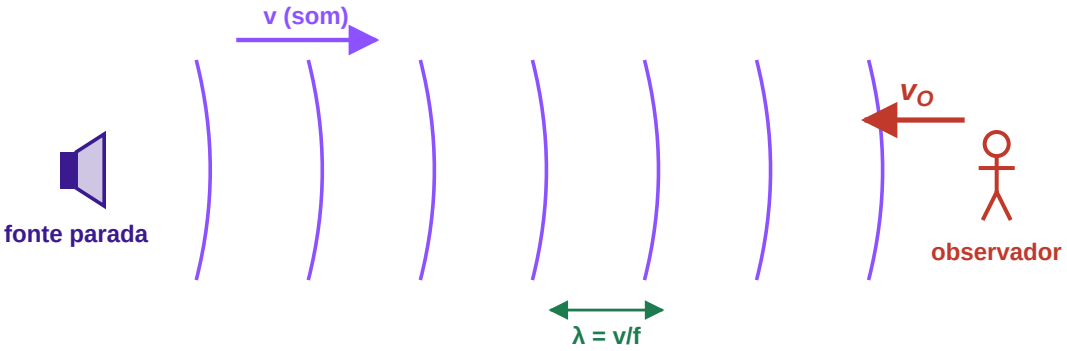
1.3 Observador em movimento

Agora a fonte está parada em relação ao ar, e o comprimento de onda é o normal, $\lambda = v/f$. O que muda é a rapidez com que o observador encontra as frentes. Parado, ele é atravessado por $v/\lambda = f$ frentes por segundo. Indo ao encontro das ondas com velocidade v_O, a velocidade relativa entre ele e as frentes passa a ser $v + v_O$, e o número de frentes recebidas por segundo é

$$f' = \frac{v + v_O}{\lambda} = f\,\frac{v + v_O}{v} \qquad (\text{observador se aproximando}).$$

Afastando-se da fonte, ele foge das frentes, que o alcançam com velocidade relativa $v - v_O$:

$$f' = f\,\frac{v - v_O}{v} \qquad (\text{observador se afastando}).$$



o observador cruza $(v + v_O)/\lambda$ frentes por segundo

Com a fonte parada, o comprimento de onda não muda; o observador que corre em direção à fonte cruza mais frentes por segundo.

Se o observador se afastar com $v_O = v$, nenhuma frente o alcança e $f' = 0$: ele acompanha a onda e não ouve o som.

1.4 Fórmula geral e convenção de sinais

Quando fonte e observador se movem ao longo da mesma reta, os dois efeitos se combinam: a fonte altera o comprimento de onda e o observador altera a rapidez com que cruza as frentes.

FÓRMULA GERAL (VELOCIDADES EM RELAÇÃO AO AR)

$$f' = f \cdot \frac{v \pm v_O}{v \mp v_F}$$

Regra prática: use os sinais de cima (+ no numerador, − no denominador) para o movimento que **aproxima** e os de baixo para o movimento que **afasta**. Cada sinal é decidido separadamente: o do numerador olha só o movimento do observador; o do denominador, só o da fonte. Conferência: **aproximação aumenta a frequência** e afastamento a diminui.

Uma alternativa à regra prática é orientar um eixo **do observador para a fonte** e escrever as velocidades com sinal nesse eixo. A fórmula passa a ter um único formato, que vale para qualquer combinação de movimentos.



sentido positivo: de O para F

$f' = f \cdot (v + v_O)/(v + v_F)$, com v_O e v_F medidos com sinal nesse eixo

Convenção do eixo de O para F. O observador que anda para a fonte tem $v_O > 0$; a fonte que anda para o observador tem $v_F < 0$.

Situação	Fórmula	Efeito
Fonte se aproxima, observador parado	$f' = f\,\dfrac{v}{v - v_F}$	$f' > f$
Fonte se afasta, observador parado	$f' = f\,\dfrac{v}{v + v_F}$	$f' < f$
Observador se aproxima, fonte parada	$f' = f\,\dfrac{v + v_O}{v}$	$f' > f$
Observador se afasta, fonte parada	$f' = f\,\dfrac{v - v_O}{v}$	$f' < f$

Quando os dois se movem, combinam-se os sinais. Por exemplo, um carro A (fonte) persegue um carro B (observador) que vai à frente, no mesmo sentido: A se aproxima de B, mas B se afasta de A. Então $f' = f\,\dfrac{v - v_B}{v - v_A}$. Se as velocidades forem iguais, $f' = f$: sem movimento relativo, não há efeito Doppler.

Exemplo: uma moto com buzina de 500 Hz se aproxima, a 40 m/s, de um pedestre parado ($v = 340$ m/s): $f' = 500 \cdot \dfrac{340}{300} \approx 567$ Hz. Depois que ela passa: $f' = 500 \cdot \dfrac{340}{380} \approx 447$ Hz.

> **ERROS COMUNS: SINAIS**
>
> • Trocar os sinais de numerador e denominador. Antes de fazer a conta, decida se cada movimento aproxima ou afasta e confira no final se a frequência subiu ou desceu como deveria.
> • Tomar o sentido do movimento em relação a um eixo fixo (direita ou esquerda) em vez de olhar se ele aproxima ou afasta a fonte do observador. Uma fonte que anda para a direita aproxima-se de quem está à direita e afasta-se de quem está à esquerda.
> • Confundir comprimento de onda com frequência percebida: o ouvido percebe frequência. Com a fonte parada e o observador em movimento, o comprimento de onda no ar é o normal, mas a frequência percebida muda.

1.5 O meio em repouso como referência

Todas as velocidades da fórmula são medidas **em relação ao ar** (ou à água, para o sonar). O som é uma onda mecânica: sua velocidade v é a velocidade em relação ao meio. Por isso fonte e observador não aparecem na fórmula de forma simétrica. Com a mesma velocidade relativa u, o resultado depende de quem se move. Para $u = 34$ m/s e $v = 340$ m/s:

- fonte se aproximando de observador parado: $f' = f\,\dfrac{340}{306} \approx 1{,}111\,f$;
- observador se aproximando de fonte parada: $f' = f\,\dfrac{374}{340} = 1{,}100\,f$.

Para velocidades pequenas em comparação com a do som ($u \ll v$), os dois resultados ficam muito próximos e valem, aproximadamente,

$$f' \approx f\left(1 \pm \frac{u}{v}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Delta f}{f} \approx \frac{u}{v},$$

com o sinal + na aproximação. A diferença cresce com a velocidade: se a fonte se aproxima com $v_F \to v$, f' cresce sem limite, enquanto um observador que se aproxima com $v_O = v$ ouve apenas $2f$.

> **ERRO COMUM: VELOCIDADE RELATIVA**
>
> Não se pode subtrair as velocidades de fonte e observador e usar o resultado como se só um deles se movesse. Na perseguição do item 1.4, com $f = 500$ Hz, $v_A = 40$ m/s e $v_B = 30$ m/s, o correto é $500 \cdot \frac{310}{300} \approx 516{,}7$ Hz; tratar a fonte como se se aproximasse a 10 m/s de um observador parado daria $500 \cdot \frac{340}{330} \approx 515{,}2$ Hz, valor errado. Cada velocidade entra no seu lugar, medida em relação ao ar.

1.6 Vento

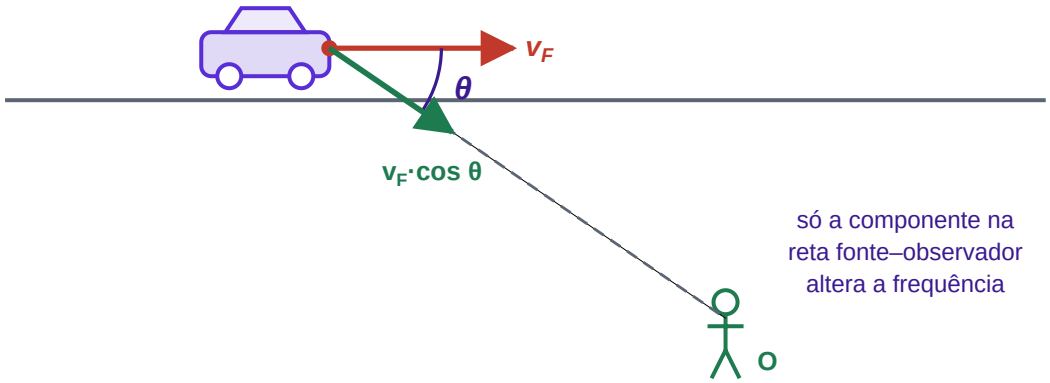
Com vento, o ar se move em relação ao solo. A forma mais segura de resolver é passar para o referencial do ar: calculam-se as velocidades de fonte e observador **em relação ao ar** e aplica-se a fórmula geral com a velocidade normal do som, v.

- Fonte e observador parados em relação ao solo, com vento soprando: no referencial do ar os dois têm a mesma velocidade, e $f' = f$. O vento altera a velocidade do som em relação ao solo ($v + w$ a favor do vento, $v - w$ contra) e o comprimento de onda, mas **não** a frequência percebida.
- Se fonte ou observador se movem em relação ao solo, desconta-se a velocidade do vento para obter a velocidade em relação ao ar. Exemplo: um carro anda a 30 m/s a favor de um vento de 10 m/s; em relação ao ar, ele se move a 20 m/s.

Outra forma equivalente: no referencial do solo, a velocidade do som passa a ser $v \pm w$, e esse valor substitui v na fórmula, com as velocidades de fonte e observador medidas em relação ao solo. O resolvido 4 mostra os dois caminhos.

1.7 Movimento não colinear

Se a fonte não se move ao longo da reta que a liga ao observador, só a **componente da velocidade nessa reta** altera a frequência. A componente perpendicular não aproxima nem afasta (num intervalo curto) e não produz efeito Doppler.



Carro passando ao largo de um observador. Na fórmula entra $v_F \cos\theta$, em que θ é o ângulo entre a velocidade da fonte e a reta fonte–observador.

FÓRMULA (FONTE EM MOVIMENTO OBLÍQUO, OBSERVADOR PARADO)

$$f' = f\,\frac{v}{v - v_F\cos\theta}$$

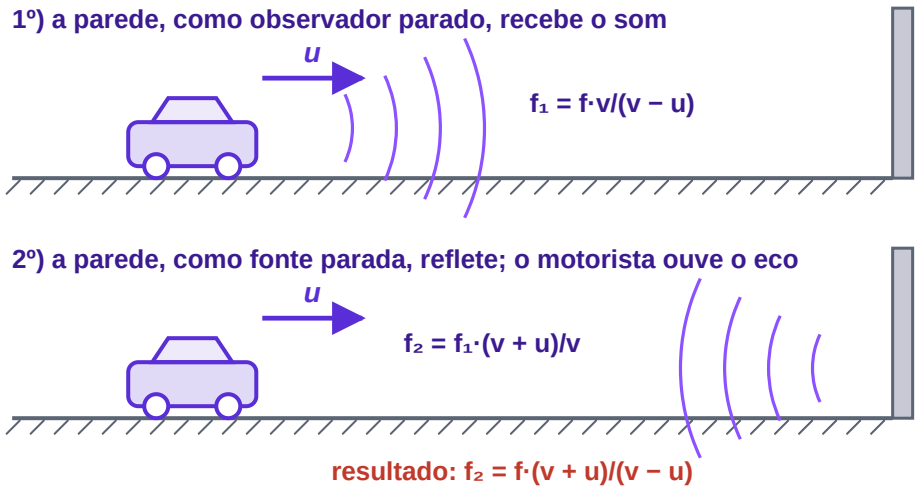
O ângulo θ é medido **no instante da emissão**. Para $\theta < 90°$, a fonte se aproxima e $f' > f$; para $\theta = 90°$, $f' = f$; para $\theta > 90°$, $\cos\theta < 0$ e $f' < f$. Se o observador também se move, faz-se o mesmo com a componente da velocidade dele na reta que o liga à fonte.

Por isso, quando um carro passa a certa distância de nós, a frequência não salta de um valor para outro: ela cai de forma contínua, mais rapidamente perto do instante de maior proximidade. Quanto mais perto da pista estiver o observador, mais brusca é a queda; no limite de um observador sobre a própria reta do movimento, ela vira um salto.

1.8 Reflexão: eco em parede e em alvo móvel

Quando o som é refletido por um objeto em movimento (ou quando a fonte se move em relação a uma parede), há **dois efeitos Doppler sucessivos**:

1. o objeto refletor recebe o som como **observador**, com a frequência f_1;
2. o objeto reemite o som com a frequência que recebeu e passa a ser a **fonte** da onda refletida; quem ouve o eco recebe f_2.



Carro buzinando em direção a uma parede: a frequência do eco ouvido pelo motorista passa por duas etapas.

Carro em direção a uma parede fixa. Na primeira etapa, a fonte (buzina) se aproxima da parede parada: $f_1 = f\,\dfrac{v}{v-u}$. Na segunda, a parede é uma fonte parada, e o motorista é um observador que se aproxima dela: $f_2 = f_1\,\dfrac{v+u}{v}$. Logo

$$f_2 = f\,\frac{v+u}{v-u}.$$

Alvo móvel e emissor parado (sonar de um navio parado, medidor fixo de velocidade): o alvo que se aproxima com velocidade u recebe $f_1 = f\,\dfrac{v+u}{v}$ (observador que se aproxima) e reemite como fonte que se aproxima: $f_2 = f_1\,\dfrac{v}{v-u}$. O resultado é o mesmo, $f_2 = f\,\dfrac{v+u}{v-u}$. Se o alvo se afasta, trocam-se os sinais: $f_2 = f\,\dfrac{v-u}{v+u}$.

APROXIMAÇÃO PARA ALVOS LENTOS

Se $u \ll v$, $\dfrac{v+u}{v-u} \approx 1 + \dfrac{2u}{v}$, e a variação de frequência do eco é

$$\Delta f \approx \frac{2u}{v} f,$$

o dobro da que haveria num efeito Doppler simples. O fator 2 vem das duas etapas.

Aplicações.

- **Sonar** de navios e submarinos e a **ecolocalização** de morcegos e golfinhos: além da distância (pelo tempo de ida e volta do eco), a frequência do eco informa se o alvo se aproxima ou se afasta, e com que velocidade.
- **Radar de trânsito**: emite micro-ondas, que são ondas eletromagnéticas e se propagam com a velocidade da luz, c. O princípio é o mesmo do eco: o carro recebe e reflete a onda, e o aparelho compara a frequência refletida com a emitida. Como $u \ll c$, a variação é minúscula, $\Delta f \approx \dfrac{2u}{c} f$, e o aparelho a mede pelo batimento entre as duas ondas. Radares meteorológicos medem dessa forma a velocidade das gotas de chuva.
- **Ultrassom Doppler** (ecodoppler): o aparelho envia ultrassom para dentro do corpo e analisa o eco refletido pelas hemácias que se movem nos vasos. A variação de frequência indica o sentido e a velocidade do fluxo de sangue, o que permite avaliar artérias, veias e o coração do feto. Como o feixe costuma fazer um ângulo com o vaso, só a componente da velocidade do sangue na direção do feixe contribui, como no item 1.7.

ERRO COMUM: ESQUECER O DUPLO DOPPLER NO ECO

No eco em alvo móvel há duas etapas, e cada uma tem sua fórmula. Aplicar o efeito uma só vez dá aproximadamente metade da variação correta. A frequência que o alvo recebe não é a mesma que volta ao emissor.

1.9 Batimentos e efeito Doppler

Dois sons de frequências próximas f_1 e f_2 produzem **batimentos**, variações periódicas de intensidade com frequência $f_{bat} = |f_1 - f_2|$ (ficha *Natureza e propriedades do som*). O efeito Doppler é uma forma simples de obter frequências próximas a partir de fontes iguais.

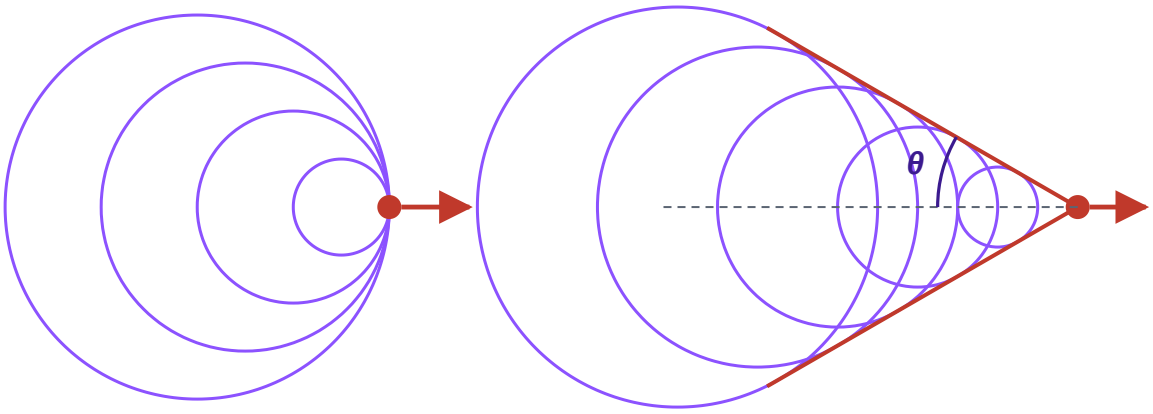
- **Som direto e som refletido:** uma pessoa caminha com velocidade u em direção a uma parede segurando um diapasão de frequência f. O som direto chega a ela com f (a fonte se move junto com ela) e o eco chega com $f\,\dfrac{v+u}{v-u}$. Ela ouve batimentos de frequência $f_{bat} = f\,\dfrac{2u}{v-u} \approx \dfrac{2u}{v} f$.
- **Entre duas fontes iguais:** um observador que anda de uma fonte para outra, de mesma frequência f, aproxima-se de uma e afasta-se da outra: $f_{bat} = f\,\dfrac{v+u}{v} - f\,\dfrac{v-u}{v} = \dfrac{2u}{v} f$. O mesmo vale para duas fontes que se movem em sentidos opostos em relação a um observador parado.

Medir batimentos é muito mais preciso que medir duas frequências separadamente, e é assim que funcionam os radares: o aparelho mistura a onda emitida com a refletida e mede a frequência do batimento.

1.10 Barreira do som e cone de Mach

Quanto mais a velocidade da fonte se aproxima da do som, mais comprimidas ficam as frentes à frente dela. Para $v_F = v$, todas as frentes emitidas passam pelo ponto onde a fonte está: elas se acumulam numa frente de pressão muito alta, a chamada **barreira do som**. Na fórmula, $\lambda' = 0$ e $f' \to \infty$.

Se $v_F > v$ (movimento **supersônico**), a fonte ultrapassa as próprias frentes. As esferas emitidas ficam todas atrás dela, e sua envoltória é uma superfície cônica com vértice na fonte, o **cone de Mach**. Em um intervalo t, a frente emitida no início tem raio vt, e a fonte percorreu $v_F t$; do triângulo retângulo formado,



(a) v_F = v: frentes acumuladas na frente da fonte (barreira do som)

(b) v_F = 2v: cone de Mach sen θ = v/v_F = 1/M

(a) Fonte com a velocidade do som: as frentes se acumulam no ponto onde ela está. (b) Fonte supersônica: as frentes ficam dentro de um cone com vértice na fonte.

CONE DE MACH

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{v\,t}{v_F\,t} = \frac{v}{v_F} = \frac{1}{M} \qquad M = \frac{v_F}{v}\ (\text{número de Mach})$$

θ é o semiângulo do cone (ângulo entre a superfície do cone e a trajetória). Quanto mais rápida a fonte, mais fechado o cone. $M < 1$: subsônico; $M > 1$: supersônico.

Estrondo sônico. A superfície do cone concentra as frentes de onda e carrega uma variação brusca de pressão. Um observador no solo ouve o estrondo no instante em que essa superfície o alcança, e não no instante em que o avião atinge a velocidade do som: o cone acompanha o avião durante todo o voo supersônico e vai varrendo o solo ao longo da trajetória. Por isso o estrondo chega depois que o avião já passou sobre o observador. O mesmo fenômeno explica o estalo de um chicote, cuja ponta ultrapassa a velocidade do som.

OBSERVAÇÃO

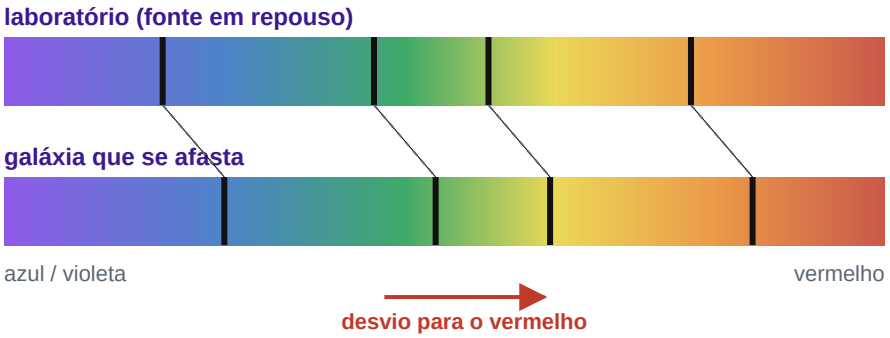
A fórmula do efeito Doppler, $f' = f\,\dfrac{v}{v - v_F}$, foi deduzida supondo que as frentes chegam ao observador antes da fonte. Para uma fonte supersônica que se aproxima, ela fornece valor negativo: o observador nada ouve até a passagem do cone e, depois, recebe os sons em ordem invertida (os emitidos por último chegam primeiro). Essa situação é explorada na questão 21.

1.11 Efeito Doppler da luz

A luz também sofre efeito Doppler, com duas diferenças importantes: ela não precisa de meio para se propagar, e sua velocidade é a mesma, c, para todos os observadores. Assim, só a **velocidade relativa** entre fonte e observador importa; não há distinção entre fonte que se move e observador que se move. Para velocidades pequenas em comparação com c,

$$\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{u}{c} \qquad \text{e} \qquad \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \approx \frac{u}{c},$$

com a frequência aumentando (e o comprimento de onda diminuindo) na aproximação. Para velocidades próximas de c é preciso usar a teoria da relatividade, que está fora do escopo desta ficha.



As linhas escuras do espectro de um elemento aparecem deslocadas para comprimentos de onda maiores na luz de uma galáxia que se afasta.

- **Desvio para o vermelho** (*redshift*): a luz de uma fonte que se afasta chega com comprimentos de onda maiores, deslocados para o lado vermelho do espectro. Na luz de uma fonte que se aproxima, o deslocamento é para o azul.
- Hubble observou, em 1929, que a luz das galáxias distantes chega desviada para o vermelho, e tanto mais quanto mais distantes elas estão. Esse é um dos principais indícios de que o Universo está em expansão.
- O mesmo princípio permite medir a rotação de estrelas e de galáxias e detectar planetas fora do Sistema Solar, pelo pequeno vaivém que eles provocam na estrela.

ERRO COMUM: FREQUÊNCIA E INTENSIDADE

O efeito Doppler altera a **frequência** (a altura do som, grave ou agudo), não a intensidade. A ambulância soa mais forte quando está perto porque a intensidade diminui com a distância, e isso não tem relação com o efeito Doppler. Uma fonte que se aproxima com velocidade constante, ao longo da reta que a liga ao observador, emite um som percebido com frequência **constante** e maior que f, embora cada vez mais intenso; o som não se torna progressivamente mais agudo durante a aproximação.

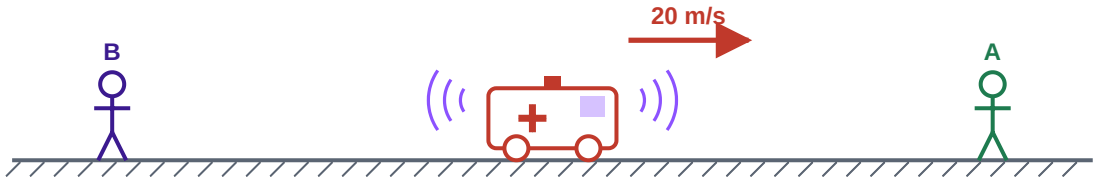
1.12 Quadro-resumo

Situação	Fórmula / regra
Fórmula geral (velocidades em relação ao ar)	$f' = f\,\dfrac{v \pm v_O}{v \mp v_F}$; sinais de cima na aproximação
Comprimento de onda à frente / atrás da fonte	$\lambda' = \dfrac{v - v_F}{f}$; $\lambda'' = \dfrac{v + v_F}{f}$
Velocidades pequenas ($u \ll v$)	$\dfrac{\Delta f}{f} \approx \dfrac{u}{v}$
Vento	velocidades em relação ao ar; fonte e observador parados no solo: $f' = f$
Movimento oblíquo	só a componente na reta fonte–observador: $f' = f\,\dfrac{v}{v - v_F\cos\theta}$
Eco em parede ou alvo móvel (aproximação)	$f_2 = f\,\dfrac{v+u}{v-u}$; $\Delta f \approx \dfrac{2u}{v}\,f$
Batimentos	$f_{bat} = \lvert f_1 - f_2\rvert$
Cone de Mach	$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{v}{v_F} = \dfrac{1}{M}$
Luz ($u \ll c$)	$\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \dfrac{u}{c}$; afastamento: desvio para o vermelho

2. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Nos exercícios, use $v = 340$ m/s para a velocidade do som no ar, salvo indicação em contrário.

Exercício resolvido 1. Uma ambulância trafega a 20 m/s numa avenida reta, com a sirene emitindo 720 Hz. Os pedestres A e B estão parados na calçada, à frente e atrás da ambulância, praticamente na reta do movimento. Determine (a) a frequência que A ouve; (b) a frequência que B ouve; (c) o comprimento de onda do som à frente e atrás da ambulância.



sirene: 720 Hz; v = 340 m/s

Resolução:

1 **(a) Fonte se aproximando de A:** $f_A = f\,\dfrac{v}{v - v_F} = 720 \cdot \dfrac{340}{320} = 765$ Hz.

2. **(b) Fonte se afastando de B:** $f_B = 720 \cdot \dfrac{340}{360} = 680$ Hz.

3. **(c) Comprimentos de onda:** à frente, $\lambda' = \dfrac{v - v_F}{f} = \dfrac{320}{720} \approx 0{,}44$ m; atrás, $\lambda'' = \dfrac{360}{720} = 0{,}50$ m. (Parada, a sirene produziria $\lambda = 340/720 \approx 0{,}47$ m.)

4. **Conferência:** $f_A = \dfrac{v}{\lambda'} = \dfrac{340}{4/9} = 765$ Hz.

Resposta: (a) 765 Hz; (b) 680 Hz; (c) ≈ 0,44 m à frente e 0,50 m atrás

Exercício resolvido 2. Uma sirene fixa num poste emite 680 Hz. Um ciclista passa por ela com velocidade constante de 10 m/s. (a) Que frequências ele ouve antes e depois de passar pelo poste? (b) Que frequência ele ouviria se estivesse parado e a sirene se aproximasse dele a 10 m/s?

Resolução:

1. **Antes (observador se aproximando):** $f' = f\,\dfrac{v + v_O}{v} = 680 \cdot \dfrac{350}{340} = 700$ Hz.

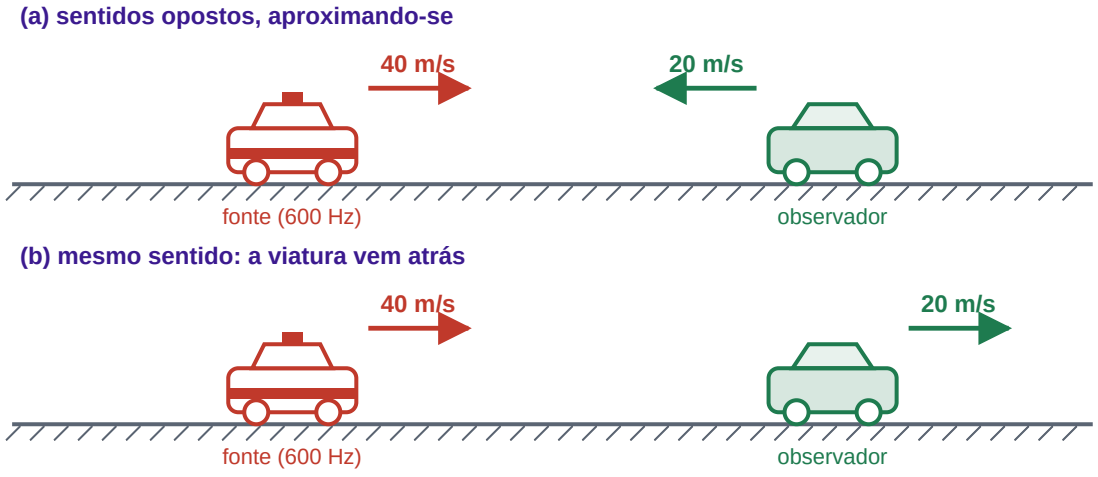
2. **Depois (observador se afastando):** $f' = 680 \cdot \dfrac{330}{340} = 660$ Hz.

3. **(b) Fonte se aproximando:** $f' = 680 \cdot \dfrac{340}{330} \approx 700{,}6$ Hz.

4. **Comparação:** a velocidade relativa é a mesma nos dois casos, mas os resultados diferem, porque as velocidades contam em relação ao ar. Para 10 m/s, bem menor que 340 m/s, a diferença é pequena.

Resposta: (a) 700 Hz e 660 Hz; (b) ≈ 700,6 Hz

Exercício resolvido 3. Uma viatura a 40 m/s, com sirene de 600 Hz, e um carro a 20 m/s trafegam na mesma estrada reta. Determine a frequência ouvida pelo motorista do carro (a) quando os veículos vêm em sentidos opostos, um ao encontro do outro; (b) quando andam no mesmo sentido, com a viatura atrás do carro; (c) na situação (a), depois que eles se cruzam.



Resolução:

1. **(a)** O observador se aproxima (+ no numerador) e a fonte se aproxima (− no denominador): $f' = 600 \cdot \dfrac{340 + 20}{340 - 40} = 600 \cdot \dfrac{360}{300} = 720$ Hz.

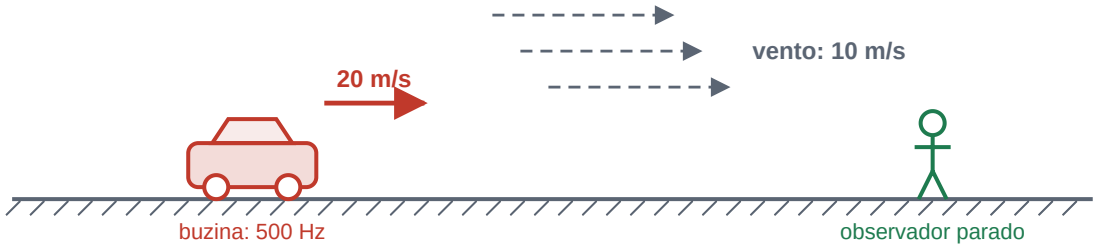
2. **(b)** A viatura se aproxima do carro (− no denominador), mas o carro, à frente, se afasta da viatura (− no numerador): $f' = 600 \cdot \dfrac{340 - 20}{340 - 40} = 600 \cdot \dfrac{320}{300} = 640$ Hz.

3. **(c)** Depois do cruzamento, os dois se afastam: $f' = 600 \cdot \dfrac{340 - 20}{340 + 40} = 600 \cdot \dfrac{320}{380} \approx 505$ Hz.

4. **Conferência:** em (a) a distância diminui depressa e f' é o maior valor; em (b) ela diminui devagar (20 m/s) e f' fica pouco acima de 600 Hz; em (c) a distância aumenta e $f' < 600$ Hz.

Resposta: (a) 720 Hz; (b) 640 Hz; (c) ≈ 505 Hz

Exercício resolvido 4. Sopra um vento de 10 m/s no sentido de um carro para um observador parado à beira da estrada. O carro se aproxima do observador a 20 m/s (em relação ao solo), buzinando a 500 Hz. Que frequência o observador ouve? E se o carro estivesse parado?



Resolução:

1. **Referencial do ar:** o ar se move a 10 m/s no sentido do carro para o observador. Em relação ao ar, o carro se aproxima do observador a $20 - 10 = 10$ m/s, e o observador, parado no solo, se move a 10 m/s em direção ao carro.

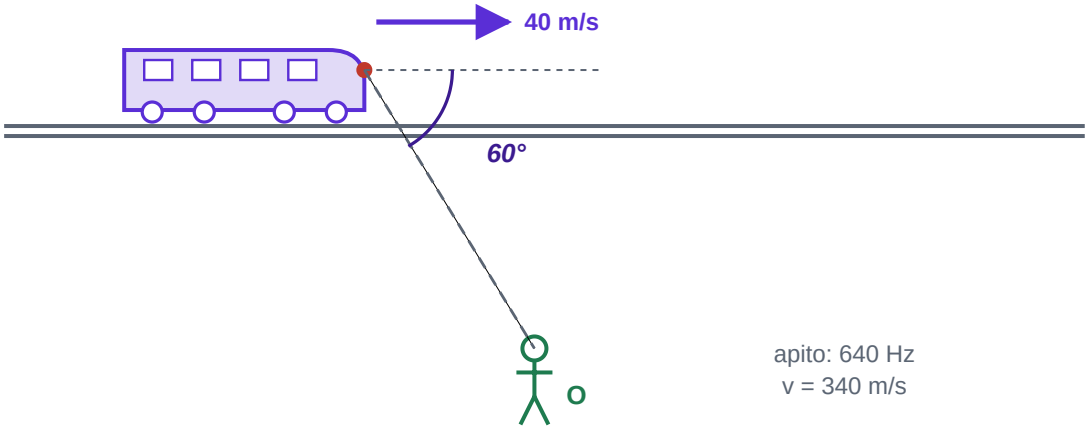
2. **Fórmula geral:** $f' = 500 \cdot \dfrac{340 + 10}{340 - 10} = 500 \cdot \dfrac{350}{330} \approx 530$ Hz.

3. **Conferência pelo referencial do solo:** a favor do vento, o som anda a $340 + 10 = 350$ m/s em relação ao solo. À frente do carro, $\lambda' = \dfrac{350 - 20}{500} = 0{,}66$ m, e o observador parado ouve $\dfrac{350}{0{,}66} \approx 530$ Hz.

4. **Carro parado:** fonte e observador têm a mesma velocidade em relação ao ar, e $f' = 500$ Hz. O vento muda o comprimento de onda ($350/500 = 0{,}70$ m), mas não a frequência.

Resposta: ≈ 530 Hz; com o carro parado, 500 Hz

Exercício resolvido 5. Um trem a 40 m/s apita com frequência de 640 Hz. Um observador está parado longe dos trilhos. Determine a frequência que ele percebe para o som emitido quando a reta que liga o trem ao observador forma com a velocidade do trem um ângulo de (a) $60°$; (b) $90°$; (c) $120°$.

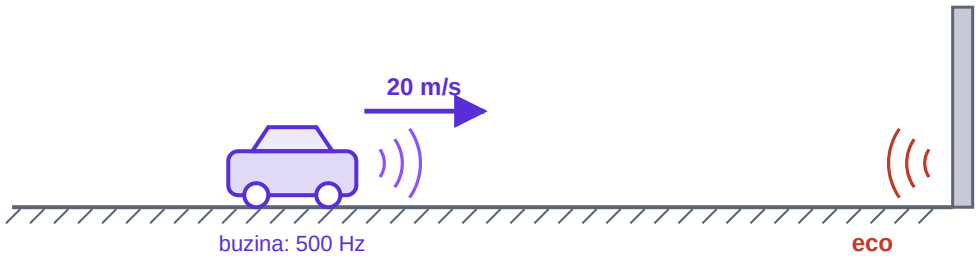


Resolução:

1. **Componente na reta trem–observador:** só ela produz o efeito: $f' = f\,\dfrac{v}{v - v_F\cos\theta}$.
2. **(a)** $v_F\cos 60^\circ = 20$ m/s (aproximação): $f' = 640\cdot\dfrac{340}{320} = 680$ Hz.
3. **(b)** $\cos 90^\circ = 0$: $f' = 640$ Hz.
4. **(c)** $v_F\cos 120^\circ = -20$ m/s (afastamento): $f' = 640\cdot\dfrac{340}{360}\approx 604$ Hz.

Resposta: (a) 680 Hz; (b) 640 Hz; (c) ≈ 604 Hz

Exercício resolvido 6. Um carro se aproxima de um paredão a 20 m/s, buzinando com frequência de 500 Hz. Determine (a) a frequência do som que chega ao paredão; (b) a frequência do eco ouvido pelo motorista; (c) a frequência dos batimentos que o motorista percebe entre o som direto da buzina e o eco.



Resolução:

1. **(a) Paredão como observador parado; fonte se aproximando:** $f_1 = 500\cdot\dfrac{340}{320} = 531{,}25$ Hz.
2. **(b) Paredão como fonte parada de frequência f_1; motorista se aproximando:** $f_2 = 531{,}25\cdot\dfrac{360}{340} = 562{,}5$ Hz. Direto: $f_2 = 500\cdot\dfrac{360}{320} = 562{,}5$ Hz.
3. **(c) Som direto:** a buzina se move junto com o motorista; não há movimento relativo e ele a ouve com 500 Hz. Batimentos: $f_{bat} = 562{,}5 - 500 = 62{,}5$ Hz.
4. **Estimativa:** $\dfrac{2u}{v}\,f = \dfrac{40}{340}\cdot 500 \approx 59$ Hz, perto do valor exato; a diferença vem de u/v não ser tão pequeno.

Resposta: (a) 531,25 Hz; (b) 562,5 Hz; (c) 62,5 Hz

Exercício resolvido 7. Um medidor ultrassônico fixo emite 35 kHz em direção a um carrinho que se afasta dele em linha reta. O eco volta ao medidor com 33 kHz. Qual é a velocidade do carrinho? Compare com o valor dado pela aproximação $\Delta f \approx \dfrac{2u}{v} f$.

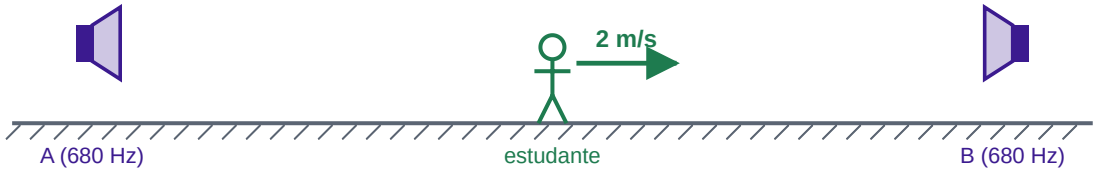


Resolução:

1. **Duas etapas:** o carrinho recebe como observador que se afasta, $f_1 = f\,\dfrac{v-u}{v}$, e reemite como fonte que se afasta, $f_2 = f_1\,\dfrac{v}{v+u}$. Logo $f_2 = f\,\dfrac{v-u}{v+u}$.
2. **Equação:** $\dfrac{33}{35} = \dfrac{340-u}{340+u} \Rightarrow 33(340+u) = 35(340-u) \Rightarrow 68u = 2\cdot 340 \Rightarrow u = 10$ m/s.
3. **Aproximação:** $u \approx \dfrac{v\,|\Delta f|}{2f} = \dfrac{340\cdot 2}{2\cdot 35} \approx 9{,}7$ m/s, cerca de 3% abaixo do valor exato.

Resposta: 10 m/s, afastando-se (a aproximação dá ≈ 9,7 m/s)

Exercício resolvido 8. Dois alto-falantes A e B, ligados ao mesmo gerador, emitem 680 Hz um de frente para o outro. Um estudante caminha de A para B a 2 m/s. Que frequências ele recebe de cada alto-falante e quantos batimentos por segundo percebe?

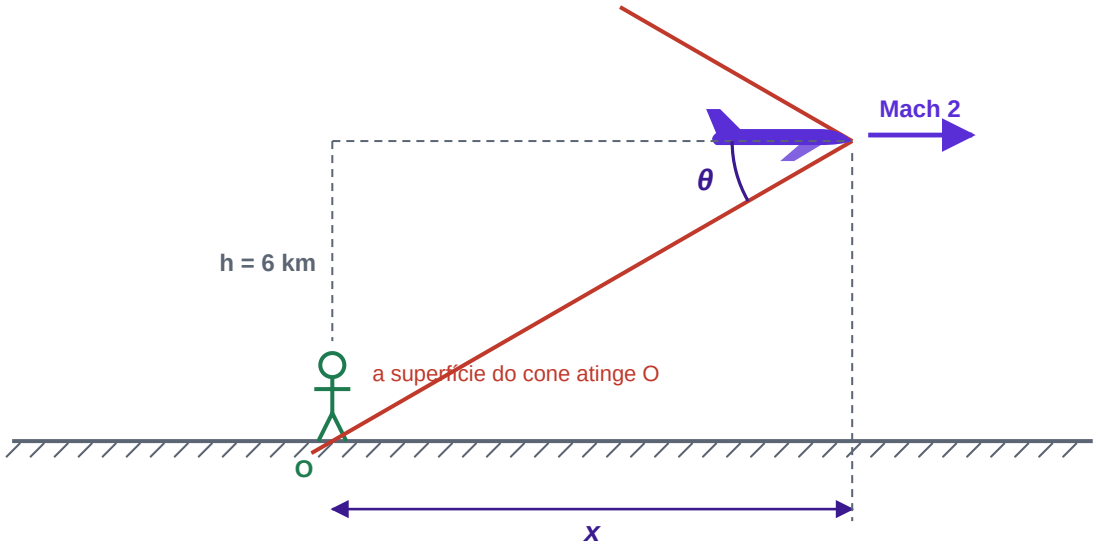


Resolução:

1. **Som de B (observador se aproximando):** $f_B = 680\cdot\dfrac{342}{340} = 684$ Hz.
2. **Som de A (observador se afastando):** $f_A = 680\cdot\dfrac{338}{340} = 676$ Hz.
3. **Batimentos:** $f_{bat} = 684 - 676 = 8$ Hz, igual a $\dfrac{2u}{v} f = \dfrac{4}{340}\cdot 680$.

Resposta: 684 Hz (de B), 676 Hz (de A) e 8 batimentos por segundo

Exercício resolvido 9. Um avião voa horizontalmente a Mach 2, a 6 km de altura. (a) Qual é o semiângulo do cone de Mach? (b) A que distância horizontal do observador estará o avião quando o estrondo sônico chegar a ele? (c) Quanto tempo depois de o avião passar sobre o observador o estrondo é ouvido? Considere a velocidade do som igual a 340 m/s em toda a região.



Resolução:

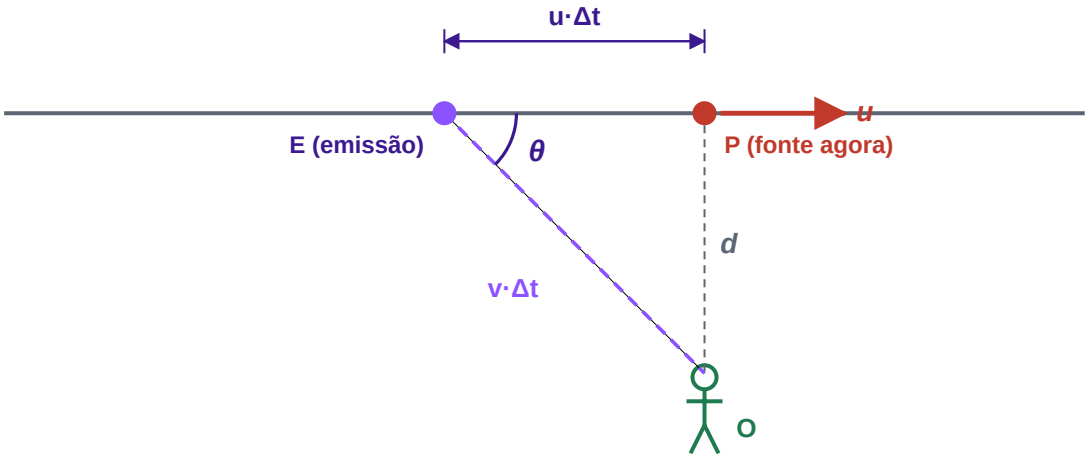
1. **(a)** $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{M} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30°$.

2. **(b)** O estrondo chega quando a superfície do cone passa pelo observador. No triângulo da figura, $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{h}{x} \Rightarrow x = \dfrac{6}{\operatorname{tg} 30°} = 6\sqrt{3} \approx 10{,}4$ km.

3. **(c)** O avião, a $v_F = 680$ m/s, percorre x depois de passar sobre o observador: $t = \dfrac{10\,392}{680} \approx 15$ s.

Resposta: (a) 30°; (b) ≈ 10,4 km; (c) ≈ 15 s

Exercício resolvido 10 [nível ITA/IME]. Uma fonte de frequência $f = 480$ Hz se move com velocidade constante $u = 68$ m/s ao longo de uma reta. Um observador parado está a uma distância $d = 170$ m dessa reta. (a) Que frequência ele percebe no instante em que a fonte passa pelo ponto P da reta mais próximo dele? (b) No instante em que ele ouve exatamente 480 Hz, onde está a fonte?



Resolução:

1. **Atraso do som:** o som que chega ao observador quando a fonte está em P foi emitido antes, num ponto E, um intervalo Δt antes. Nesse intervalo, o som percorreu EO $= v\Delta t$ e a fonte percorreu EP $= u\Delta t$.

2. **Ângulo na emissão:** no triângulo retângulo EPO, $\cos\theta = \dfrac{\text{EP}}{\text{EO}} = \dfrac{u\Delta t}{v\Delta t} = \dfrac{u}{v} = 0{,}2$.

3. **(a)** $f' = f\,\dfrac{v}{v - u\cos\theta} = f\,\dfrac{v}{v - u^2/v} = f\,\dfrac{v^2}{v^2 - u^2} = \dfrac{480}{1 - 0{,}04} = 500$ Hz. Ao passar por P, a fonte ainda soa mais aguda que 480 Hz.

4. **(b)** Ouve-se $f' = f$ quando o som foi emitido com $\theta = 90°$, isto é, com a fonte em P. Esse som leva $\dfrac{d}{v} = \dfrac{170}{340} = 0{,}5$ s para chegar, e nesse tempo a fonte avança $68 \cdot 0{,}5 = 34$ m.

Resposta: (a) 500 Hz; (b) 34 m além de P

3. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

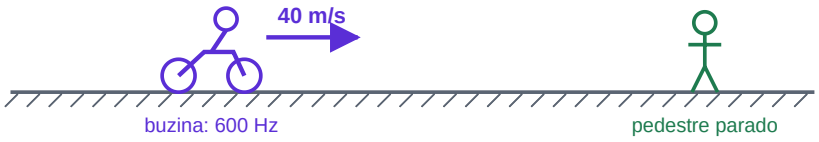
Quando necessário, use $v = 340$ m/s para a velocidade do som no ar e $g = 10$ m/s².

Nível 1 básico

01 Uma ambulância percorre com velocidade constante uma avenida reta, com a sirene ligada, e passa por um pedestre parado na calçada. Em relação ao som emitido pela sirene, o pedestre ouve um som:

(A) mais grave durante a aproximação e mais agudo durante o afastamento.
(B) de mesma altura o tempo todo, apenas mais intenso durante a aproximação.
(C) mais agudo durante a aproximação e mais grave durante o afastamento.
(D) mais agudo tanto na aproximação quanto no afastamento.
(E) mais agudo apenas se a ambulância superar a velocidade do som.

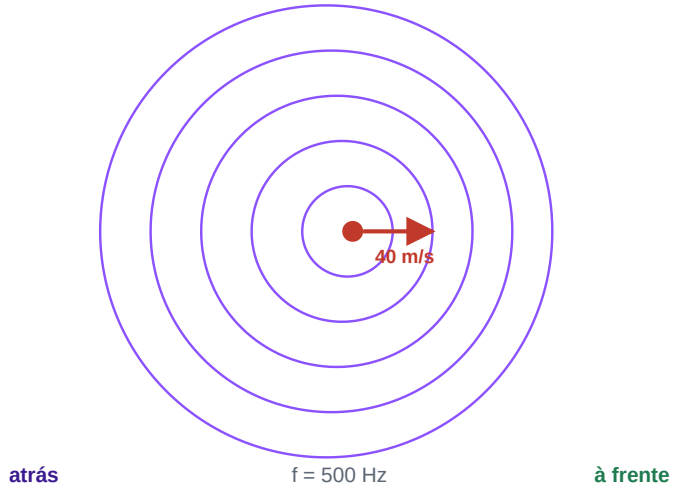
02 Uma moto se aproxima a 40 m/s de um pedestre parado, buzinando com frequência de 600 Hz. Que frequência o pedestre ouve? E depois que a moto passa por ele?



03 Um motorista se aproxima, a 17 m/s, de uma sirene fixa que emite $1\,000$ Hz. A frequência que ele percebe é:

(A) 950 Hz
(B) $1\,000$ Hz
(C) $1\,050$ Hz
(D) $1\,053$ Hz
(E) $1\,100$ Hz

04 Uma fonte de 500 Hz se move para a direita a 40 m/s. Calcule o comprimento de onda do som no ar (a) à frente da fonte; (b) atrás dela. (c) Qual seria o comprimento de onda com a fonte parada?



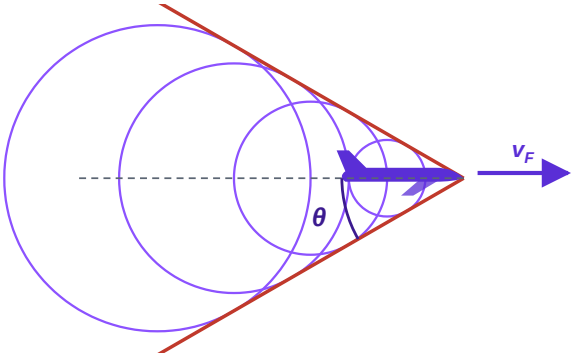
05 Considere as afirmações sobre o efeito Doppler para o som, com o ar parado.

I. Quando a fonte se move, muda o comprimento de onda do som no ar, mas não a velocidade do som no ar.
II. Se fonte e observador se movem com a mesma velocidade, na mesma direção e no mesmo sentido, a frequência percebida é igual à emitida.
III. O som de uma fonte que se aproxima parece mais agudo porque sua intensidade aumenta.

Está correto o que se afirma em:

(A) I, apenas.
(B) II, apenas.
(C) I e II, apenas.
(D) II e III, apenas.
(E) I, II e III.

06 Um avião voa a Mach 2. O semiângulo θ do cone de Mach formado atrás dele, indicado na figura, vale:



(A) $15°$
(B) $30°$
(C) $45°$
(D) $60°$
(E) $90°$

Nível 2 intermediário

07 Dois carros trafegam em sentidos opostos numa estrada reta, um ao encontro do outro: A a 30 m/s, buzinando com frequência de 620 Hz, e B a 20 m/s. Que frequência o motorista de B ouve (a) antes do cruzamento; (b) depois do cruzamento?



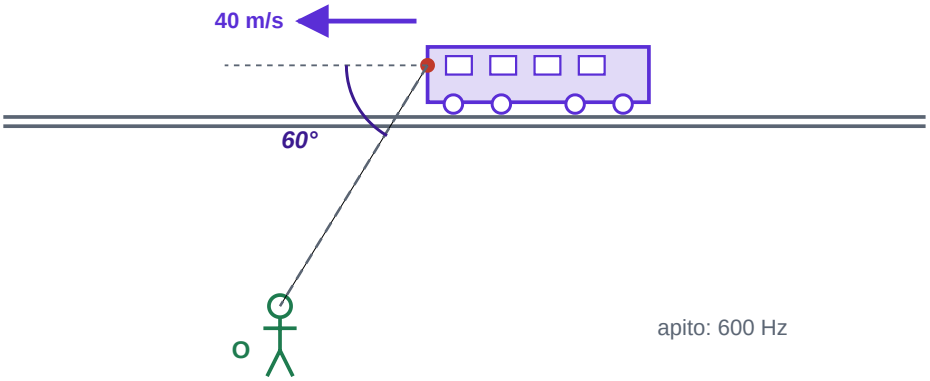
08 Uma viatura com sirene de 900 Hz, a 40 m/s, persegue um carro que foge a 30 m/s na mesma estrada reta. O motorista do carro ouve a sirene com frequência de:



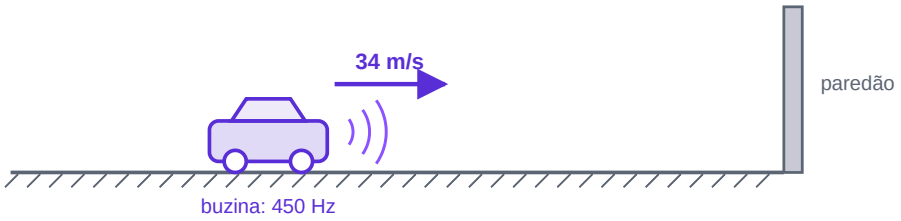
(A) 900 Hz
(B) 927 Hz
(C) 930 Hz
(D) $1\,020$ Hz
(E) $1\,110$ Hz

09 Uma fonte de 500 Hz e um observador estão parados no solo, e sopra um vento de 20 m/s no sentido do observador para a fonte. Determine (a) a velocidade do som em relação ao solo no trajeto da fonte ao observador; (b) o comprimento de onda nesse trajeto; (c) a frequência que o observador ouve.

10 Um trem se move a 40 m/s com o apito emitindo 600 Hz. Um observador está parado longe dos trilhos. (a) Que frequência ele percebe para o som emitido quando a reta trem–observador forma 60° com a velocidade do trem, como na figura? (b) E para o som emitido quando esse ângulo for de 120°, depois da passagem?

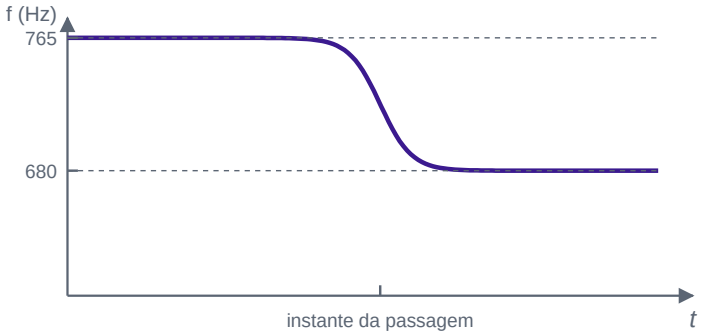


11 Um carro se aproxima de um paredão a 34 m/s, buzinando com frequência de 450 Hz. O motorista ouve o eco com frequência de:



(A) 495 Hz
(B) 500 Hz
(C) 540 Hz
(D) 550 Hz
(E) 600 Hz

12 Um sensor parado à beira de uma pista registra a frequência da buzina de um carro que passa com velocidade constante, sempre buzinando. O gráfico mostra o registro. Determine a velocidade do carro e a frequência emitida pela buzina.



Nível 3 avançado

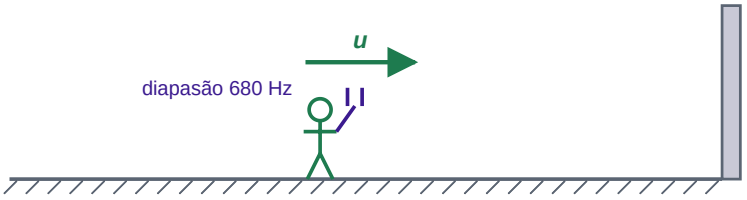
13 O sonar de um navio parado emite ondas de $29{,}7$ kHz, e o eco que volta de um submarino tem $30{,}3$ kHz. Com a velocidade do som na água igual a $1\,500$ m/s, o submarino:

(A) se aproxima a $7{,}5$ m/s.
(B) se afasta a 15 m/s.
(C) se aproxima a 15 m/s.
(D) se aproxima a 30 m/s.
(E) se afasta a 30 m/s.

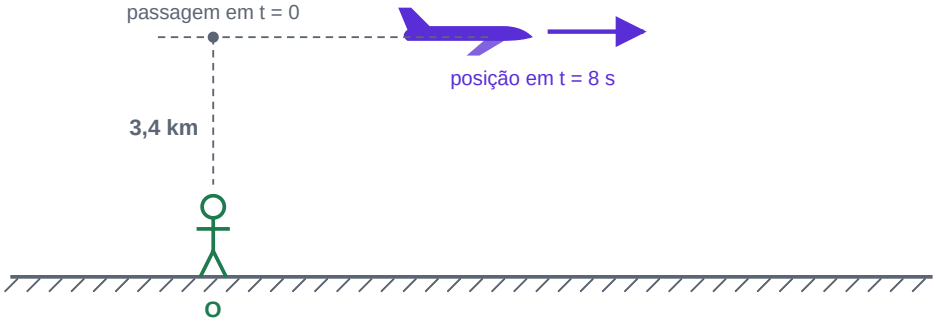
14 Um morcego voa a 20 m/s perseguindo uma mariposa que voa a 10 m/s, no mesmo sentido, à frente dele. O morcego emite pulsos de ultrassom de 56 kHz. (a) Com que frequência o ultrassom chega à mariposa? (b) Com que frequência o morcego recebe o eco?



15 Um estudante caminha com velocidade constante u em direção a um paredão, segurando um diapasão de 680 Hz. Ele percebe 4 batimentos por segundo entre o som direto e o eco. Determine u pela expressão exata e pela aproximação $f_{bat} \approx \dfrac{2u}{v} f$.



16 Um avião supersônico voa horizontalmente a $3{,}4$ km de altura. Um observador no solo ouve o estrondo sônico 8 s depois de o avião passar exatamente sobre sua cabeça. Determine o número de Mach do avião, considerando $v = 340$ m/s em toda a região.

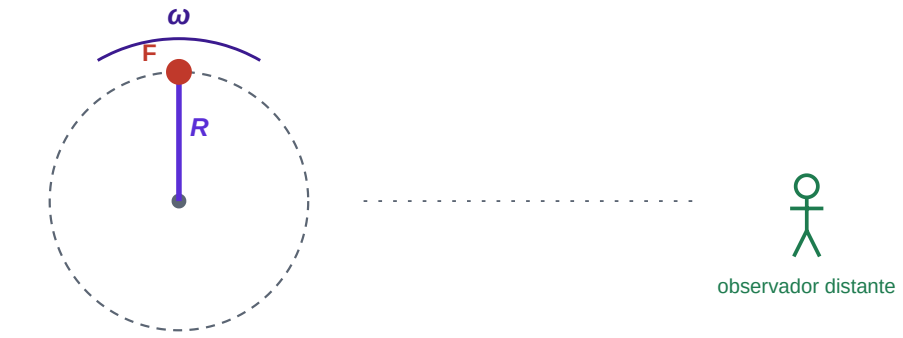


17 Uma raia do espectro do hidrogênio tem comprimento de onda de $656{,}00$ nm quando medida em laboratório. Na luz de uma galáxia, a mesma raia aparece em $662{,}56$ nm. Sendo $c = 3{,}0 \times 10^5$ km/s, a galáxia:

(A) se aproxima a $3{,}0 \times 10^3$ km/s.
(B) se afasta a $3{,}0 \times 10^3$ km/s.
(C) se afasta a $3{,}0 \times 10^4$ km/s.
(D) se afasta a $3{,}0 \times 10^2$ km/s.
(E) se aproxima a $6{,}0 \times 10^3$ km/s.

Nível ITA/IME olímpico

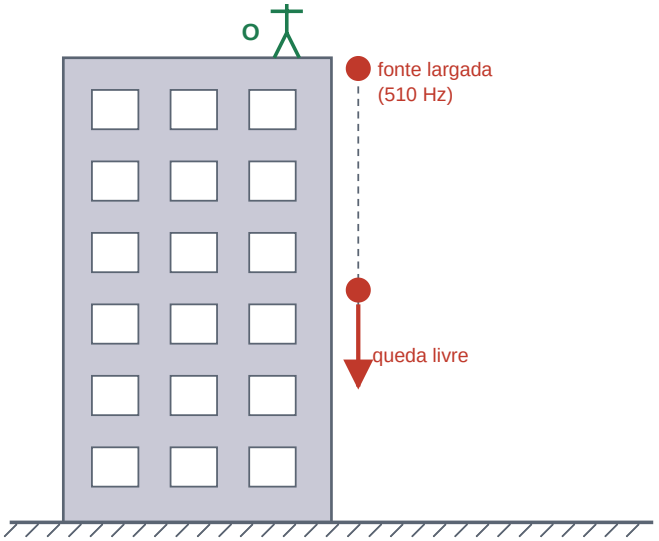
18 Uma pequena fonte de 640 Hz está presa na ponta de uma haste de $0{,}5$ m que gira num plano horizontal com velocidade angular constante de 40 rad/s. Um observador está parado no mesmo plano, muito longe do eixo. (a) Quais são a maior e a menor frequência que ele percebe? (b) Em que posições da fonte são emitidos os sons com essas frequências? (c) Por que é importante que o observador esteja muito longe?



R = 0,5 m; ω = 40 rad/s; f = 640 Hz

19 Uma fonte de frequência f se move com velocidade u em direção a uma parede. Um observador parado atrás da fonte, na mesma reta, ouve o som direto e o som refletido pela parede. (a) Mostre que a frequência dos batimentos que ele percebe é $f_{bat} = \dfrac{2fuv}{v^2 - u^2}$. (b) Para $f = 500$ Hz e $f_{bat} = 10$ Hz, determine u.

20 Do alto de um prédio, um observador solta, a partir do repouso, uma pequena fonte que emite 510 Hz. Despreze a resistência do ar e suponha o prédio alto o bastante. (a) Em que instante, após a largada, foi emitido o som que o observador percebe com 480 Hz? (b) Em que instante ele ouve esse som?



21 Uma fonte que emite continuamente um som de frequência f se aproxima de um observador parado, em linha reta, com velocidade $v_F = 2v$. No instante $t = 0$ ela está à distância D do observador. (a) Mostre que o som emitido no instante t_e (com $t_e < D/v_F$) chega ao observador no instante $t_c = \dfrac{D}{v} - t_e$. (b) Que sons chegam primeiro ao observador: os emitidos no início ou no fim da aproximação? (c) Que frequência o observador percebe? Compare com o valor dado pela fórmula $f' = f\,\dfrac{v}{v - v_F}$ e interprete o sinal.

4. QUESTÕES OFICIAIS DE VESTIBULARES E CONCURSOS

Questões oficiais de provas anteriores da EFOMM, da Escola Naval e da AFA, selecionadas do banco de questões da Trilha Militares.

22 [Escola Naval 2019]

Assinale a opção que completa corretamente as lacunas da sentença abaixo. Uma fonte sonora emitindo um som de frequência f move-se em relação a um observador fixo. Sabendo-se que o observador percebe uma frequência f/2, é correto afirmar que a fonte se _____ do observador com _____.

(A) aproxima / o dobro da velocidade do som
(B) aproxima / metade da velocidade do som
(C) afasta / metade da velocidade do som
(D) aproxima / velocidade igual à velocidade do som
(E) afasta / velocidade igual à velocidade do som

23 [EFOMM 2026]

Duas fontes sonoras pontuais se movem em trajetórias circulares concêntricas de raios R_1 e R_2, com $R_2 > R_1$, e emitem ondas com potência constante e de mesma frequência. Suas velocidades angulares constantes valem ω_1 e ω_2, com $\omega_2 = 1{,}01\,\omega_1$. Um observador no centro das circunferências percebe:

(A) um som de volume oscilante com frequência de batimentos proporcional a $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$.
(B) um som de volume oscilante com frequência de batimentos proporcional a $\frac{|\omega_1-\omega_2|}{2}$.
(C) um som de volume oscilante, cuja frequência depende da relação entre R_1, R_2, ω_1 e ω_2.
(D) um som com intensidade sonora constante e frequência igual à das fontes.
(E) um som com intensidade sonora constante e frequência que pode ser maior ou menor do que a frequência das fontes.

24 [Escola Naval 2018]

A figura acima mostra um tubo de 1,0 m de comprimento, aberto nas extremidades e em repouso. Considere que o terceiro harmônico é produzido no tubo e parte do som que escapa é captado no detector D, que se afasta em linha reta. Qual é a razão, v_D/v_S, entre a velocidade do detector, v_D, e a velocidade do som, v_S, para que a frequência do som captado seja igual à frequência fundamental do tubo?



(A) 1/3
(B) 1/2
(C) 3/5
(D) 3/4
(E) 2/3

25 [AFA 2018]

Uma fonte sonora A, em repouso, emite um sinal sonoro de frequência constante $f_A = 100$ Hz. Um sensor S desloca-se com velocidade constante $V_S = 80$ m/s, em relação à Terra, sobre um plano perfeitamente retilíneo, em direção à fonte sonora, como mostra a Figura 1.

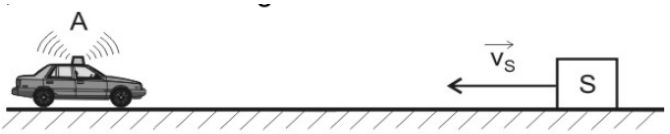


Figura 1

O sensor registra a frequência aparente devido à sua movimentação em relação à fonte sonora e a reenvia para um laboratório onde um sistema de caixas sonoras, acopladas a três tubos sonoros, de comprimentos L_1, L_2 e L_3, reproduz essa frequência aparente fazendo com que as colunas de ar desses tubos vibrem produzindo os harmônicos apresentados na Figura 2.

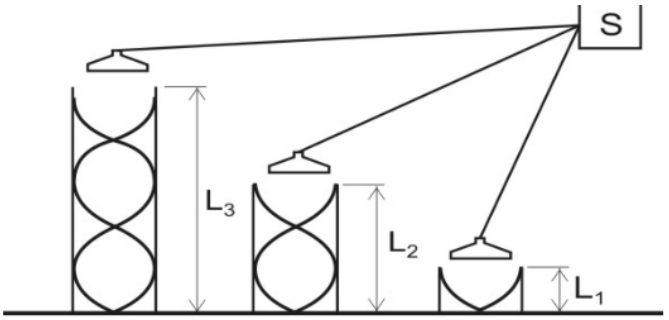


Figura 2

Considere que o sensor se movimenta em um local onde a velocidade do som é constante e igual a 320 m/s, que os tubos sonoros possuam diâmetros muito menores do que seus respectivos comprimentos e que a velocidade do som no interior desses tubos seja também constante e igual a 320 m/s. Considere também que a fonte A e o ar estejam em repouso em relação à Terra. Nessas condições, é correto afirmar que os comprimentos L_1, L_2 e L_3, respectivamente, em metros, são

(A) $\frac{16}{25}; \frac{48}{25}; \frac{16}{5}$
(B) $\frac{5}{31}; \frac{15}{31}; \frac{25}{8}$
(C) $\frac{16}{27}; \frac{48}{27}; \frac{16}{7}$
(D) $\frac{16}{27}; \frac{48}{27}; \frac{19}{9}$

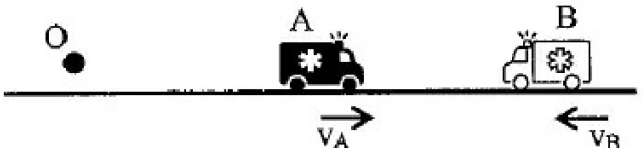
26 [EFOMM 2020]

Ana brinca em um balanço, enquanto segura um diapasão vibrando a $520\,\text{Hz}$. O ponto mais alto de sua trajetória pendular está a $1{,}25$ metros de altura em relação ao ponto mais baixo. Enquanto isso, Beatriz, de altura semelhante a Ana e localizada em um ponto distante à frente do brinquedo, corre em direção à amiga com velocidade constante de $2\,\text{m/s}$. Supondo que o movimento oscilatório de Ana ocorre sem perda de energia, qual valor mais se aproxima da maior frequência que Beatriz irá ouvir durante sua trajetória? Considere $g = 10\,\text{m/s}^2$ e $v_{som} = 343\,\text{m/s}$.

(A) $531\,\text{Hz}$
(B) $533\,\text{Hz}$
(C) $535\,\text{Hz}$
(D) $536\,\text{Hz}$
(E) $538\,\text{Hz}$

27 [Escola Naval 2024]

Um receptor localizado em O capta ondas sonoras provenientes de duas ambulâncias A e B, que emitem um sinal sonoro de mesma frequência $1{,}0 \times 10^2$ Hz. As duas ambulâncias se deslocam em sentidos opostos, a uma velocidade $v_s/10$, onde v_s é a velocidade do som no ar. Devido à superposição das ondas sonoras que chegam no receptor, a onda resultante possui batimentos com frequência f_{bat}. Assinale a opção que apresenta o valor mais próximo da frequência f_{bat}, em hertz.



(A) $2{,}0 \times 10^{0}$
(B) $2{,}0 \times 10^{1}$
(C) $9{,}0 \times 10^{1}$
(D) $1{,}1 \times 10^{2}$
(E) $2{,}0 \times 10^{2}$

28 [EFOMM 2024]

Em um laboratório de física, um professor faz uma demonstração sobre o fenômeno dos batimentos, que é decorrente da interferência de ondas sonoras. Para isso, dois autofalantes A e B estão separados por uma certa distância, e emitirão ondas sonoras senoidais a 510 Hz. Na mesma linha que une os autofalantes, há um trilho sobre o qual se move um carrinho, cuja velocidade pode ser ajustada, e sobre o qual sentarão os estudantes. Assim, quando o carrinho se move entre os autofalantes, as ondas sonoras percebidas possuem uma frequência diferente de 510 Hz, cuja intensidade oscila com uma frequência f_{bat}, que é a frequência dos batimentos. Considerando que, em média, o ouvido humano é capaz de perceber batimentos de até 15 Hz, qual é a velocidade limite em que o carrinho pode se movimentar entre os autofalantes, para que os batimentos possam ser percebidos pelos estudantes? Considere que a velocidade da propagação da onda sonora no ar é de 340 m/s e despreze ruídos e a existência de outras fontes sonoras durante a demonstração do professor.

(A) 5,0 km/h
(B) 10,0 km/h
(C) 3,0 m/s
(D) 5,0 m/s
(E) 10,0 m/s

29 [EFOMM 2021]

Uma fonte de ondas sonoras emite uma onda com $440\,\mathrm{Hz}$ de frequência em direção a um objeto que dela se afasta. A onda, após ser refletida pelo objeto, retorna à fonte, que mede o novo valor de $272\,\mathrm{Hz}$ para sua frequência. Considere que o objeto e a fonte estão sempre em uma mesma reta e que a velocidade do som no ar vale $340\,\mathrm{m/s}$. Quanto vale, em m/s, o módulo da velocidade do objeto?

(A) 60
(B) 64
(C) 72
(D) 80
(E) 88

30 [Escola Naval 2020]

Um atleta de triatlon treina pedalando em uma via com velocidade constante, quando uma viatura da polícia rodoviária, em perseguição a outro veículo, aproxima-se com a sirene ligada. Quando a viatura ultrapassa o ciclista afastando-se dele, este passa a ouvir a sirene com uma frequência de valor $\frac{5}{6}$ da frequência que ele ouvia antes, com a viatura se aproximando. Sabendo que o atleta e a viatura estavam no mesmo sentido e a viatura estava a uma velocidade constante de 144 km/h, qual era a velocidade aproximada do ciclista? (Dado: velocidade do som = 340 m/s)

(A) 3,2 m/s
(B) 6,4 m/s
(C) 8,4 m/s
(D) 9,2 m/s
(E) 10 m/s

31 [Escola Naval 2021]

Um submarino lança um torpedo em águas paradas. Ambos se movem na mesma direção e sentido. O submarino com velocidade constante u_s emite um sinal de sonar de frequência f_0, cuja onda sonora na água se propaga com velocidade v e recebe o sinal refletido com frequência f_r. De acordo com os dados, qual a expressão que representa o módulo da velocidade do torpedo?

(A) $v\left[\left(\frac{f_0}{f_r}\right)\left(\frac{v+u_s}{v-u_s}\right)-1\right]\left[\left(\frac{f_0}{f_r}\right)\left(\frac{v+u_s}{v-u_s}\right)+1\right]^{-1}$
(B) $v\left[\left(\frac{f_0}{f_r}\right)\left(\frac{v+u_s}{v-u_s}\right)+1\right]\left[\left(\frac{f_0}{f_r}\right)\left(\frac{v+u_s}{v-u_s}\right)-1\right]^{-1}$
(C) $v\left[\left(\frac{f_0}{f_r}\right)\left(\frac{v-u_s}{v-u_s}\right)-1\right]\left[\left(\frac{f_0}{f_r}\right)\left(\frac{v+u_s}{v+u_s}\right)+1\right]^{-1}$
(D) $v\left[\left(\frac{f_0}{f_r}\right)\left(\frac{v-u_s}{v+u_s}\right)+1\right]\left[\left(\frac{f_0}{f_r}\right)\left(\frac{v-u_s}{v+u_s}\right)-1\right]^{-1}$
(E) $v\left[\left(\frac{f_0}{f_r}\right)\left(\frac{v-u_s}{v+u_s}\right)-1\right]\left[\left(\frac{f_0}{f_r}\right)\left(\frac{v-u_s}{v+u_s}\right)+1\right]^{-1}$

5. GABARITO COMENTADO

Exercícios propostos

Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.
01	C	03	C	05	C	06	B
08	C	11	D	13	C	17	B

▼ **Nível 1 (01 a 06)**

01 (C). Na aproximação, $f' > f$; no afastamento, $f' < f$. A intensidade também varia (por causa da distância), mas não é ela que define a altura do som. Não é preciso velocidade supersônica para haver efeito Doppler.

02. Aproximando: $f' = 600 \cdot \dfrac{340}{340-40} = 600 \cdot \dfrac{340}{300} = 680$ Hz. Afastando: $f' = 600 \cdot \dfrac{340}{380} \approx 537$ Hz.

03 (C). Observador se aproximando de fonte parada: $f' = 1000 \cdot \dfrac{340+17}{340} = 1000 \cdot 1{,}05 = 1050$ Hz. O valor $1\,053$ Hz resulta de usar, por engano, a fórmula da fonte em movimento ($1000 \cdot 340/323$).

04. (a) $\lambda' = \dfrac{v - v_F}{f} = \dfrac{300}{500} = 0{,}60$ m. (b) $\lambda'' = \dfrac{380}{500} = 0{,}76$ m. (c) $\lambda = \dfrac{340}{500} = 0{,}68$ m.

05 (C). I: correta; a velocidade do som depende do meio. II: correta; com o observador à frente, $f' = f\,\dfrac{v-u}{v-u} = f$ (com o observador atrás, o resultado é o mesmo). III: incorreta; o aumento da intensidade se deve à diminuição da distância e não altera a frequência.

06 (B). $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{v}{v_F} = \dfrac{1}{M} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30°$.

▼ **Nível 2 (07 a 12)**

07. (a) Os dois se aproximam: $f' = 620 \cdot \dfrac{340+20}{340-30} = 620 \cdot \dfrac{360}{310} = 720$ Hz. (b) Os dois se afastam: $f' = 620 \cdot \dfrac{340-20}{340+30} = 620 \cdot \dfrac{320}{370} \approx 536$ Hz.

08 (C). A viatura se aproxima do carro ($-v_F$ no denominador) e o carro se afasta da viatura ($-v_O$ no numerador): $f' = 900 \cdot \dfrac{340-30}{340-40} = 900 \cdot \dfrac{310}{300} = 930$ Hz. A alternativa B (927 Hz) corresponde ao erro de usar a velocidade relativa de 10 m/s como se só a fonte se movesse; a D ignora o movimento do carro.

09. (a) Do observador para a fonte, o vento sopra contra o som que vai da fonte ao observador: $v_{solo} = 340 - 20 = 320$ m/s. (b) $\lambda = \dfrac{320}{500} = 0{,}64$ m. (c) $f' = \dfrac{v_{solo}}{\lambda} = 500$ Hz. Fonte e observador estão parados em relação ao solo e, portanto, têm a mesma velocidade em relação ao ar: não há efeito Doppler.

10. (a) Componente de aproximação: $40\cos 60° = 20$ m/s. $f' = 600 \cdot \dfrac{340}{320} = 637{,}5$ Hz. (b) Componente de afastamento: 20 m/s. $f' = 600 \cdot \dfrac{340}{360} \approx 567$ Hz.

11 (D). Duas etapas: $f_1 = 450 \cdot \dfrac{340}{306} = 500$ Hz (paredão como observador) e $f_2 = 500 \cdot \dfrac{374}{340} = 550$ Hz (motorista como observador que se aproxima). Direto: $450 \cdot \dfrac{374}{306} = 550$ Hz. As alternativas A e B aplicam o efeito uma só vez; a C usa a aproximação $f\left(1 + \frac{2u}{v}\right)$, ruim para $u/v = 0{,}1$.

12. Antes da passagem, $f_1 = f\,\dfrac{v}{v-u} = 765$ Hz; depois, $f_2 = f\,\dfrac{v}{v+u} = 680$ Hz. Dividindo: $\dfrac{765}{680} = \dfrac{v+u}{v-u} = \dfrac{9}{8} \Rightarrow 8(340+u) = 9(340-u) \Rightarrow u = 20$ m/s. Então $f = 765 \cdot \dfrac{320}{340} = 720$ Hz.

▼ Nível 3 (13 a 17)

13 (C). O eco tem frequência maior: o submarino se aproxima. $\dfrac{30{,}3}{29{,}7} = \dfrac{1500+u}{1500-u} \Rightarrow 30{,}3(1500-u) = 29{,}7(1500+u) \Rightarrow 60u = 0{,}6 \cdot 1500 \Rightarrow u = 15$ m/s. Aplicar o efeito uma só vez levaria a cerca de 30 m/s (alternativa D).

14. (a) O morcego (fonte) se aproxima e a mariposa (observador) se afasta: $f_1 = 56 \cdot \dfrac{340-10}{340-20} = 56 \cdot \dfrac{330}{320} = 57{,}75$ kHz. (b) A mariposa reemite como fonte que se afasta, e o morcego é observador que se aproxima: $f_2 = 57{,}75 \cdot \dfrac{340+20}{340+10} = 57{,}75 \cdot \dfrac{360}{350} = 59{,}4$ kHz. O eco tem frequência maior porque a distância entre eles diminui, à razão de 10 m/s.

15. O som direto chega com 680 Hz (o diapasão se move com o estudante) e o eco com $680\,\dfrac{340+u}{340-u}$. Então $680 \cdot \dfrac{2u}{340-u} = 4 \Rightarrow 1360u = 1360 - 4u \Rightarrow u = \dfrac{1360}{1364} \approx 0{,}997$ m/s. Pela aproximação: $4 = \dfrac{2u}{340} \cdot 680 = 4u \Rightarrow u = 1{,}0$ m/s. Para velocidades de caminhada, a aproximação é excelente.

16. Em $t = 8$ s o avião percorreu $x = v_F \cdot 8$, e a superfície do cone passa pelo observador: $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{h}{x}$. Com $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{v}{v_F}$, vem $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{v}{\sqrt{v_F^2 - v^2}}$. Igualando: $\dfrac{v}{\sqrt{v_F^2 - v^2}} = \dfrac{h}{v_F t} \Rightarrow v^2 v_F^2 t^2 = h^2(v_F^2 - v^2) \Rightarrow v_F = \dfrac{hv}{\sqrt{h^2 - v^2 t^2}}$. Com $h = 3400$ m e $vt = 2720$ m: $\sqrt{3400^2 - 2720^2} = 2040$ m, e $v_F = \dfrac{3400 \cdot 340}{2040} \approx 567$ m/s. $M = \dfrac{567}{340} = \dfrac{5}{3} \approx 1{,}7$. (Conferência: $\operatorname{sen}\theta = 0{,}6$, $\operatorname{tg}\theta = 0{,}75$ e $x = \dfrac{3400}{0{,}75} \approx 4533$ m $= 567 \cdot 8$.)

17 (B). O comprimento de onda aumentou: desvio para o vermelho, a galáxia se afasta. $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = \dfrac{6{,}56}{656} = 0{,}010 = \dfrac{u}{c} \Rightarrow u = 0{,}010 \cdot 3{,}0 \times 10^5 = 3{,}0 \times 10^3$ km/s.

▼ Nível ITA/IME (18 a 21)

18. (a) A fonte tem velocidade $u = \omega R = 40 \cdot 0{,}5 = 20$ m/s, de módulo constante e direção variável. Para um observador muito distante, a reta fonte–observador tem direção praticamente fixa. A frequência é máxima quando a velocidade aponta para o observador e mínima quando aponta no sentido oposto: $f_{máx} = 640 \cdot \dfrac{340}{320} = 680$ Hz e $f_{mín} = 640 \cdot \dfrac{340}{360} \approx 604$ Hz. (b) Nas duas posições em que a haste é perpendicular à direção do observador (a velocidade da fonte fica paralela a essa direção). (c) Com o observador longe, a reta fonte–observador tem direção praticamente fixa durante a volta, e θ é o ângulo entre a velocidade e essa direção. Perto do eixo, essa direção mudaria ao longo da volta, e a variação da distância também alteraria os intervalos de chegada dos sons.

19. (a) Som direto: a fonte se afasta do observador, $f_d = f\,\dfrac{v}{v+u}$. Som refletido: a parede recebe $f\,\dfrac{v}{v-u}$ (fonte se aproximando) e o reemite parada; o observador, também parado, recebe a mesma frequência: $f_r = f\,\dfrac{v}{v-u}$. Logo $f_{bat} = fv\left(\dfrac{1}{v-u} - \dfrac{1}{v+u}\right) = \dfrac{2fuv}{v^2-u^2}$. (b) $10(340^2 - u^2) = 2 \cdot 500 \cdot 340\,u \Rightarrow u^2 + 34\,000u - 115\,600 = 0 \Rightarrow u = \dfrac{-34\,000 + \sqrt{34\,000^2 + 4 \cdot 115\,600}}{2} \approx 3{,}40$ m/s. Como $u \ll v$, a aproximação $f_{bat} \approx \dfrac{2u}{v} f$ dá praticamente o mesmo: $u \approx \dfrac{10 \cdot 340}{1000} = 3{,}4$ m/s.

20. (a) A fonte se afasta do observador, que está acima dela: $480 = 510 \cdot \dfrac{340}{340 + v_F} \Rightarrow 340 + v_F = \dfrac{510 \cdot 340}{480} = 361{,}25 \Rightarrow v_F = 21{,}25$ m/s. Em queda livre, $v_F = g t_e \Rightarrow t_e = 2{,}125$ s. (b) Nesse instante, a fonte está $\dfrac{g t_e^2}{2} = 5 \cdot 2{,}125^2 \approx 22{,}6$ m abaixo do observador. O som leva $\dfrac{22{,}6}{340} \approx 0{,}066$ s para subir: $t_c \approx 2{,}125 + 0{,}066 \approx 2{,}19$ s.

21. (a) No instante t_e, a fonte está à distância $D - v_F t_e = D - 2 v t_e$. O som emitido leva $\dfrac{D - 2 v t_e}{v}$ para chegar: $t_c = t_e + \dfrac{D}{v} - 2 t_e = \dfrac{D}{v} - t_e$. (b) Quanto maior t_e, menor t_c: os sons emitidos no fim da aproximação chegam primeiro, e o observador ouve a sequência em ordem invertida. Nada é ouvido antes de $t = D/v_F$, quando a fonte (e com ela a superfície do cone) chega ao observador, e o último som a chegar, em $t = D/v$, é o emitido em $t = 0$. (c) Dois sons emitidos com intervalo Δt_e chegam com intervalo $|\Delta t_c| = \Delta t_e$; assim, o observador recebe as oscilações no mesmo ritmo em que foram emitidas: $f' = f$, como uma gravação tocada de trás para a frente. A fórmula dá $f' = f \dfrac{v}{v - 2v} = -f$: o módulo está correto, e o sinal negativo indica a inversão da ordem de chegada. Em geral, para $M > 1$, $|f'| = \dfrac{f}{M - 1}$.

Questões oficiais

Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.
22	E	23	D	24	E	25	A
26	A	27	B	28	D	29	D
30	D	31	A				

▼ 22 a 31 – Questões oficiais

22 (E) · Escola Naval 2019.

Frequência menor significa fonte se afastando:

$$f' = f \frac{v}{v + v_F} = \frac{f}{2} \;\Rightarrow\; v_F = v$$

23 (D) · EFOMM 2026.

As velocidades das fontes são sempre perpendiculares à linha que as liga ao centro: as distâncias ao observador não mudam. Não há efeito Doppler e cada onda chega com a mesma frequência e amplitude.

Como as distâncias R_1 e R_2 são fixas, a diferença de fase entre as duas ondas no centro também é fixa: não há batimento. O observador ouve intensidade constante na frequência das fontes.

24 (E) · Escola Naval 2018.

No tubo aberto, $f_3 = 3 f_1$. Com o detector se afastando da fonte parada:

$$f' = f_3 \left(1 - \frac{v_D}{v_S}\right) = f_1 \;\Rightarrow\; 1 - \frac{v_D}{v_S} = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; \frac{v_D}{v_S} = \frac{2}{3}$$

25 (A) · AFA 2018.

$$f' = f_A \frac{v + V_S}{v} = 100 \cdot \frac{400}{320} = 125 \text{ Hz} \qquad \lambda = \frac{320}{125} = 2{,}56 \text{ m}$$

Os tubos estão fechados embaixo (apoiados no chão) e abertos em cima. Pela figura, têm $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{4}$ de comprimento de onda:

$$L_1 = 0{,}64 = \frac{16}{25} \qquad L_2 = 1{,}92 = \frac{48}{25} \qquad L_3 = 3{,}2 = \frac{16}{5}$$

26 (A) · EFOMM 2020.

Velocidade máxima de Ana (no ponto mais baixo): $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{25} = 5\,\mathrm{m/s}$. A maior frequência ocorre quando as duas se aproximam:

$$f' = 520 \cdot \frac{343 + 2}{343 - 5} = 520 \cdot \frac{345}{338} \approx 531\,\mathrm{Hz}$$

27 (B) · Escola Naval 2024.

Pela figura, A se afasta de O e B se aproxima:

$$f_A = \frac{100}{1{,}1} \approx 90{,}9\,\mathrm{Hz} \qquad f_B = \frac{100}{0{,}9} \approx 111{,}1\,\mathrm{Hz} \qquad f_{bat} \approx 20\,\mathrm{Hz}$$

28 (D) · EFOMM 2024.

Movendo-se para B, o carrinho se aproxima de B e se afasta de A:

$$f_B = f\left(1 + \frac{v}{c}\right), \quad f_A = f\left(1 - \frac{v}{c}\right) \;\Rightarrow\; f_{bat} = \frac{2fv}{c}$$

$$\frac{2 \cdot 510 \cdot v}{340} \le 15 \;\Rightarrow\; v \le 5{,}0\,\mathrm{m/s}$$

29 (D) · EFOMM 2021.

O objeto recebe como observador que se afasta e reemite como fonte que se afasta:

$$f' = f\,\frac{v - u}{v + u} \;\Rightarrow\; \frac{272}{440} = \frac{340 - u}{340 + u}$$

$$272(340 + u) = 440(340 - u) \;\Rightarrow\; 712u = 57120 \;\Rightarrow\; u \approx 80\,\mathrm{m/s}$$

30 (D) · Escola Naval 2020.

Viatura a 40 m/s. Antes, ela vem por trás e o ciclista se afasta dela; depois, ela está à frente se afastando e o ciclista vai em sua direção:

$$f_1 = f\,\frac{v - v_c}{v - v_F} \qquad f_2 = f\,\frac{v + v_c}{v + v_F}$$

$$\frac{(340 + v_c)\cdot 300}{(340 - v_c)\cdot 380} = \frac{5}{6} \;\Rightarrow\; 1800(340 + v_c) = 1900(340 - v_c) \;\Rightarrow\; v_c = \frac{34\,000}{3700} \approx 9{,}2\,\mathrm{m/s}$$

31 (A) · Escola Naval 2021.

O torpedo (velocidade u_t) vai à frente, afastando-se do submarino. Ele recebe e reflete:

$$f_1 = f_0\,\frac{v - u_t}{v - u_s} \qquad f_r = f_1\,\frac{v + u_s}{v + u_t}$$

Com $Y = \frac{f_0}{f_r}\cdot\frac{v+u_s}{v-u_s}$, fica $\frac{v+u_t}{v-u_t} = Y$:

$$u_t = v\,\frac{Y - 1}{Y + 1}$$