PROF. LUIS TEIXEIRA
Física | Matemática

FICHA DE FÍSICA

Acústica

Cordas vibrantes e tubos sonoros

Aluno(a): _____ | **Data:** ___/___/____ | **Prof.:** Luis Teixeira

1. TEORIA

1.1 Revisão: a equação fundamental da ondulatória

Numa onda periódica, cada ponto do meio repete o seu movimento com período T e frequência $f = 1/T$. A distância entre dois pontos consecutivos que estão na mesma fase é o **comprimento de onda** λ. Durante um período, a onda avança exatamente λ; daí

EQUAÇÃO FUNDAMENTAL

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

- A **frequência** é imposta pela fonte e não muda quando a onda passa de um meio para outro.
- A **velocidade** depende só do meio (corda, ar, água...).
- O **comprimento de onda** se ajusta aos dois: $\lambda = v/f$.

As ondas numa corda são transversais; o som no ar é uma onda longitudinal de pressão. A natureza do som, a velocidade do som nos diferentes meios, a intensidade, a altura e o timbre são tratados na ficha *Natureza e propriedades do som*. Nesta ficha estudamos os sistemas que vibram em frequências bem definidas, as cordas e as colunas de ar, que são a base de todos os instrumentos musicais.

1.2 Velocidade de uma onda numa corda

A velocidade de um pulso numa corda esticada depende de duas grandezas: a **tração** F, que puxa cada pedaço da corda de volta para a posição de equilíbrio, e a inércia da corda, medida pela **densidade linear** μ (massa por unidade de comprimento). Quanto mais esticada, mais rápida a onda; quanto mais pesada, mais lenta.

FÓRMULA DE TAYLOR

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \mu = \frac{m}{L}$$

F em newtons, μ em kg/m e v em m/s. Para um fio de material de densidade (massa específica) ρ e seção transversal de área A:

$$\mu = \rho A \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}, \qquad A = \frac{\pi d^2}{4} \text{ (fio de diâmetro } d\text{)}.$$

Conferência das unidades: $\dfrac{\text{N}}{\text{kg/m}} = \dfrac{\text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{\text{kg/m}} = \dfrac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$, cuja raiz é m/s.

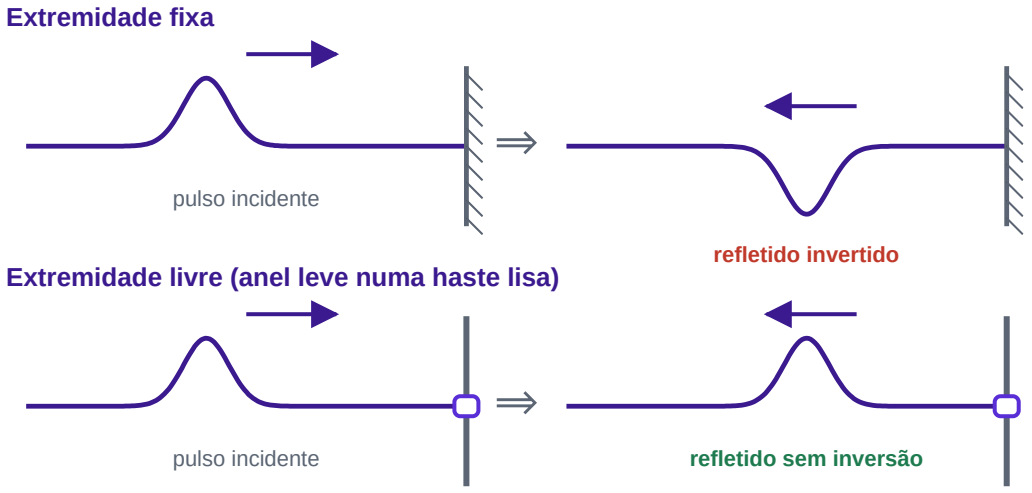
Exemplo: uma corda de 50 cm e massa $0{,}5$ g, esticada com tração de 40 N: $\mu = \dfrac{0{,}5\times10^{-3}}{0{,}50} = 1{,}0\times10^{-3}$ kg/m e $v = \sqrt{\dfrac{40}{1{,}0\times10^{-3}}} = \sqrt{4\times10^{4}} = 200$ m/s.

> **ERROS COMUNS**
> • Deixar μ em g/m ou g/cm: converta para kg/m antes de usar a fórmula (1 g/m $= 10^{-3}$ kg/m).
> • Usar em $\mu = m/L$ a massa do bloco pendurado: m é a massa da **corda**. O bloco entra na tração: em equilíbrio, $F = Mg$.
> • Esquecer o empuxo quando o corpo que traciona a corda está mergulhado num líquido: nesse caso $F = P - E$.
> • Achar que a velocidade depende da frequência ou da amplitude com que se agita a corda: para uma corda ideal, v depende só de F e μ.

1.3 Reflexão nas extremidades

Quando um pulso chega ao fim da corda, ele volta. O que acontece com a forma do pulso depende de como a extremidade está presa.

- **Extremidade fixa** (corda presa a uma parede): ao chegar, o pulso puxa a parede para cima; pela terceira lei de Newton, a parede puxa a corda para baixo. O pulso refletido volta **invertido** (inversão de fase de meio ciclo).
- **Extremidade livre** (a corda termina num anel leve que desliza sem atrito numa haste): a ponta sobe livremente e o pulso volta **sem inversão**.



Reflexão de um pulso: invertido na extremidade fixa, sem inversão na extremidade livre. Nos dois casos a velocidade e a forma do pulso se mantêm.

Na junção de duas cordas diferentes, parte do pulso é transmitida e parte é refletida. Se a onda passa de uma corda mais leve para uma mais pesada (que se comporta como uma extremidade quase fixa), o refletido volta invertido; da mais pesada para a mais leve, volta sem inversão. O pulso transmitido nunca inverte. Na corda seguinte a frequência é a mesma, mas a velocidade e o comprimento de onda mudam.

1.4 Superposição e ondas estacionárias

Quando duas ondas se encontram, o deslocamento de cada ponto é a soma dos deslocamentos que cada onda produziria sozinha (**princípio da superposição**); depois do encontro, cada onda segue como se a outra não

existisse.

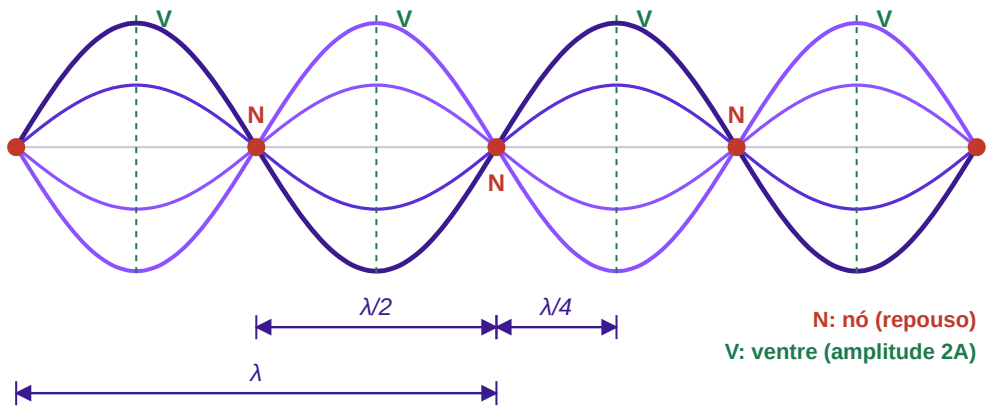
Numa corda presa nas pontas, a onda produzida pela fonte se reflete e volta sobre si mesma. A superposição de duas ondas iguais (mesma frequência, mesma amplitude) que se propagam em sentidos opostos é uma **onda estacionária**: a figura não se desloca ao longo da corda; cada ponto apenas oscila no lugar, com amplitude que depende da sua posição.

Aprofundamento. Com $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ e $\omega = 2\pi f$, as duas ondas são $y_1 = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t)$ e $y_2 = A\,\mathrm{sen}(kx + \omega t)$. Usando $\mathrm{sen}\,p + \mathrm{sen}\,q = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$:

$$y = y_1 + y_2 = \underbrace{2A\,\mathrm{sen}(kx)}_{\text{amplitude do ponto } x}\ \cos(\omega t).$$

Cada ponto executa um MHS de frequência f, mas com amplitude $2A|\,\mathrm{sen}(kx)|$.

- **Nós:** pontos que ficam sempre em repouso, $\mathrm{sen}(kx) = 0$, isto é, $x = 0,\ \frac{\lambda}{2},\ \lambda,\ \frac{3\lambda}{2},\ \ldots$
- **Ventres** (ou antinós): pontos de amplitude máxima $2A$, $x = \frac{\lambda}{4},\ \frac{3\lambda}{4},\ \frac{5\lambda}{4},\ \ldots$



Onda estacionária em vários instantes. Os nós (N) não se movem; os ventres (V) oscilam com amplitude máxima. A região entre dois nós consecutivos é um fuso.

DISTÂNCIAS NUMA ONDA ESTACIONÁRIA

Entre dois nós consecutivos: $\dfrac{\lambda}{2}$. Entre dois ventres consecutivos: $\dfrac{\lambda}{2}$. Entre um nó e o ventre vizinho: $\dfrac{\lambda}{4}$.
A região entre dois nós consecutivos chama-se **fuso** (ou ventre, em alguns livros). Todos os pontos de um mesmo fuso oscilam em fase; pontos de fusos vizinhos oscilam em oposição de fase.

Como os nós nunca se movem, nenhuma energia atravessa um nó: a energia fica confinada em cada fuso, alternando entre cinética (quando a corda passa pela posição reta) e potencial elástica (nas posições de deformação máxima). Por isso a onda estacionária é, na verdade, um **modo de vibração** da corda, e não uma onda que transporta energia.

1.5 Cordas fixas nas duas extremidades

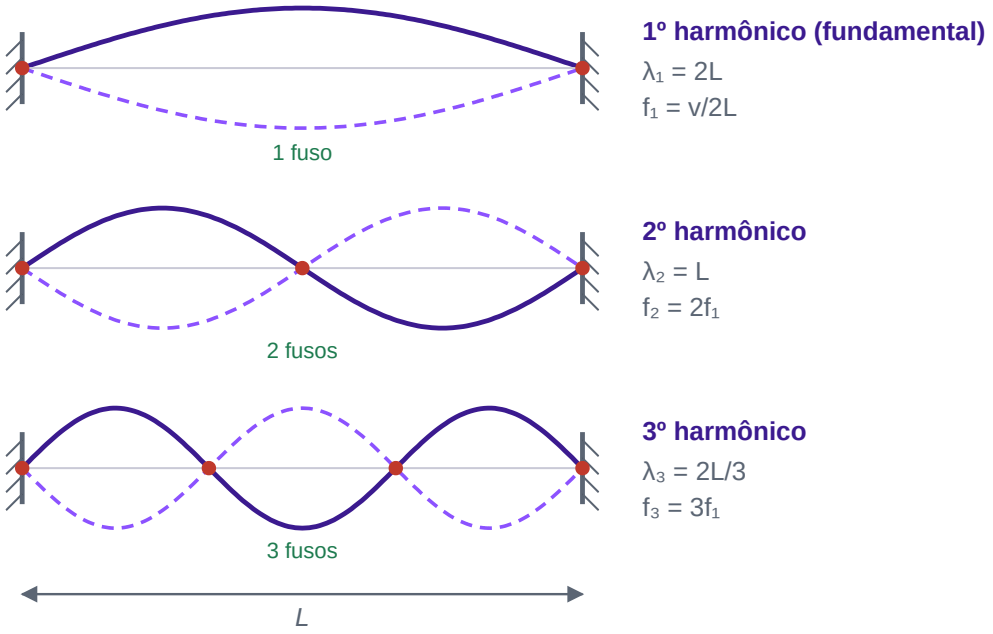
Numa corda de comprimento L presa nas duas pontas, as extremidades são obrigatoriamente nós. Então só se formam ondas estacionárias se couber na corda um número inteiro de fusos:

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

HARMÔNICOS DE UMA CORDA FIXA NAS DUAS EXTREMIDADES

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad f_n = n\,\frac{v}{2L} = n\,f_1 \qquad f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

n é a ordem do harmônico e é igual ao **número de fusos**. O modo n tem n ventres e $n+1$ nós (contando as extremidades). Todos os harmônicos são possíveis: $f_1,\ 2f_1,\ 3f_1,\ \ldots$ (série harmônica).



Os três primeiros modos de vibração de uma corda fixa nas duas extremidades. A curva contínua e a tracejada mostram a corda em dois instantes separados por meio período.

O modo de menor frequência, $f_1 = \dfrac{v}{2L}$, é o **fundamental** (1º harmônico). Ao ser tocada, a corda vibra em vários modos ao mesmo tempo. A frequência fundamental define a altura da nota, e a mistura dos harmônicos superiores, com intensidades diferentes em cada instrumento, define o timbre.

Juntando $f_1 = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$ com $\mu = \rho\,\dfrac{\pi d^2}{4}$, obtemos as **leis das cordas vibrantes** (leis de Mersenne):

$$f_1 = \frac{1}{L\,d}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}.$$

A frequência fundamental é inversamente proporcional ao comprimento e ao diâmetro, diretamente proporcional à raiz quadrada da tração e inversamente proporcional à raiz quadrada da densidade do material.

ERROS COMUNS

- Contar comprimentos de onda em vez de fusos. Um comprimento de onda completo corresponde a **dois** fusos. Uma corda com três fusos está no 3º harmônico, com $\lambda = \frac{2L}{3}$, e não $\lambda = \frac{L}{3}$ nem $\lambda = L$.
- Esquecer que as extremidades fixas são nós: no modo n há $n+1$ nós, mas só $n-1$ deles estão entre as pontas.
- Confundir a frequência do modo com a frequência fundamental: se a corda vibra com 4 fusos a 200 Hz, a fundamental é 50 Hz.

1.6 Afinação dos instrumentos de corda

A fórmula $f_1 = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$ explica como se muda a nota de uma corda:

Ação	Grandeza alterada	Efeito em f_1
girar a tarraxa, esticando a corda	F aumenta	sobe ($f_1 \propto \sqrt{F}$)
pressionar a corda num traste	L diminui	sobe ($f_1 \propto 1/L$)
usar corda mais grossa ou de material mais denso	μ aumenta	desce ($f_1 \propto 1/\sqrt{\mu}$)

No violão as seis cordas têm aproximadamente o mesmo comprimento vibrante e trações parecidas; as cordas graves são mais grossas e as três mais graves são revestidas por um fio metálico enrolado (bordões), o que aumenta μ sem deixar a corda rígida demais. Para subir uma oitava (dobrar a frequência) na mesma corda, é preciso reduzir o comprimento vibrante à metade (é o que faz o 12º traste) ou quadruplicar a tração.

DICA: COMPARAÇÃO ENTRE DUAS SITUAÇÕES

Quando o problema compara duas situações, use a razão e cancele o que não muda:

$$\frac{f'}{f} = \frac{n'}{n}\cdot\frac{L}{L'}\cdot\sqrt{\frac{F'}{F}}\cdot\sqrt{\frac{\mu}{\mu'}}.$$

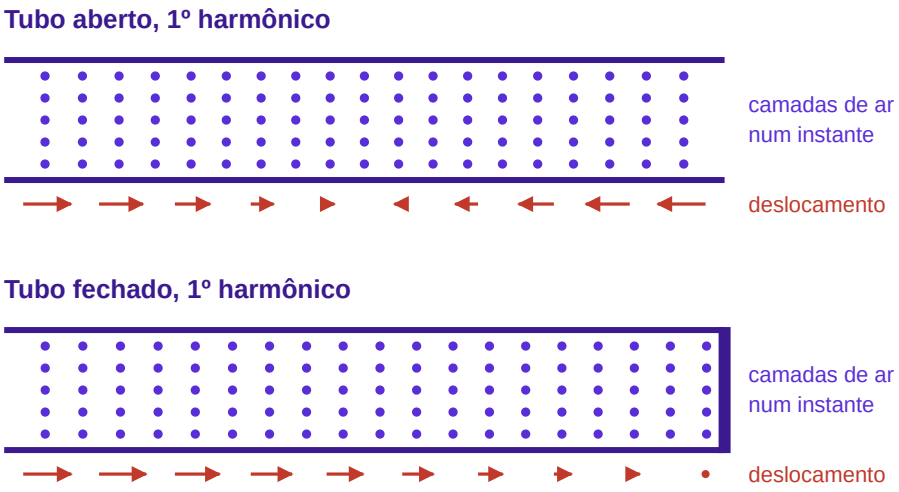
ERRO COMUM: A VELOCIDADE DO SOM NÃO É A VELOCIDADE NA CORDA

A corda faz o ar vibrar com a **mesma frequência**, mas o som se propaga no ar com a velocidade do som no ar (cerca de 340 m/s). O comprimento de onda do som no ar, $\lambda_{ar} = \dfrac{v_{som}}{f}$, é diferente do comprimento de onda na corda, $\lambda_{corda} = \dfrac{v_{corda}}{f}$. Use $v = \sqrt{F/\mu}$ para a corda e v_{som} só para o que acontece no ar.

1.7 Tubos sonoros: a coluna de ar

Num instrumento de sopro, o que vibra é a **coluna de ar** dentro do tubo. A onda sonora é longitudinal: as camadas de ar oscilam ao longo do eixo do tubo, formando compressões e rarefações. As ondas refletidas nas extremidades se superpõem e, em certas frequências, formam ondas estacionárias. As condições nas extremidades são:

- **Extremidade fechada:** o ar junto à tampa não pode se mover. É um **nó de deslocamento**. Ali a pressão varia ao máximo (ventre de pressão).
- **Extremidade aberta:** o ar se move livremente e a pressão fica praticamente igual à atmosférica. É um **ventre de deslocamento** (nó de pressão).



compressão no meio do tubo aberto e junto ao fundo do tubo fechado

Camadas de ar num instante e setas de deslocamento. No tubo aberto as extremidades são ventres de deslocamento e o meio é um nó; no tubo fechado o fundo é nó de deslocamento. Nos nós de deslocamento a pressão varia ao máximo.

ATENÇÃO À CONVENÇÃO DAS FIGURAS

As figuras de tubos sonoros desenham a **amplitude de deslocamento** como uma curva transversal, como se fosse uma corda. É só uma representação: as moléculas oscilam ao longo do eixo do tubo. Alguns livros desenham a amplitude de **pressão**; nesse caso os papéis se trocam (a extremidade fechada aparece como ventre). Antes de contar nós e ventres, verifique qual grandeza está desenhada. Nesta ficha as figuras mostram sempre o deslocamento.

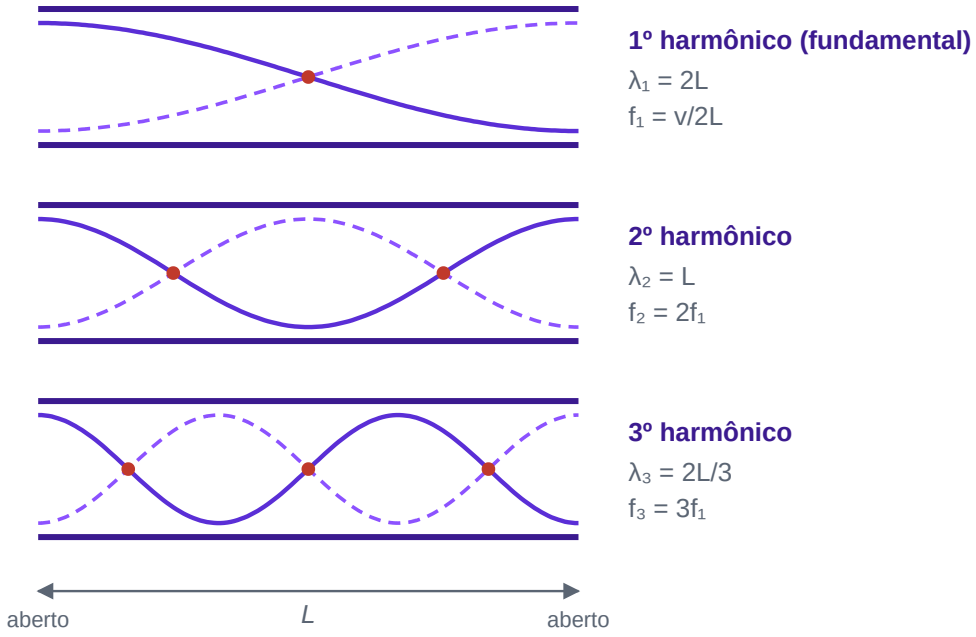
1.8 Tubo aberto

Num tubo aberto nas duas extremidades, as duas pontas são ventres de deslocamento. A distância entre dois ventres consecutivos é $\lambda/2$, então o comprimento do tubo tem de ser um número inteiro de meios comprimentos de onda, como na corda:

TUBO ABERTO

$$L = n\,\frac{\lambda}{2} \qquad \lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad f_n = n\,\frac{v}{2L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Todos os harmônicos estão presentes. O harmônico n tem n nós de deslocamento no interior do tubo. Aqui v é a velocidade do som no gás do tubo.



Tubo aberto: ventres de deslocamento nas duas bocas. Os pontos vermelhos são os nós.

Flautas, tubos abertos de órgão e o tubo de PVC soprado na borda são exemplos de tubos abertos.

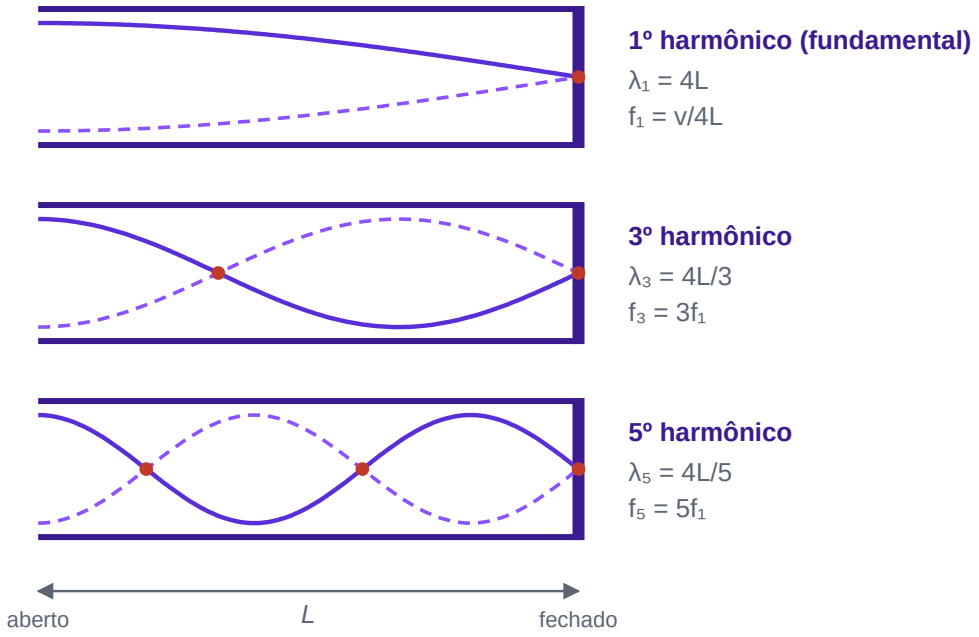
1.9 Tubo fechado

Num tubo fechado em uma extremidade (e aberto na outra), a boca é ventre e o fundo é nó de deslocamento. Entre um nó e o ventre vizinho a distância é $\lambda/4$; por isso o comprimento do tubo deve ser um número **ímpar** de quartos de comprimento de onda:

TUBO FECHADO

$$L = n\,\frac{\lambda}{4} \qquad \lambda_n = \frac{4L}{n} \qquad f_n = n\,\frac{v}{4L}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

Só existem os harmônicos **ímpares**: $f_1,\ 3f_1,\ 5f_1,\ \ldots$ A frequência fundamental, $f_1 = \dfrac{v}{4L}$, é metade da de um tubo aberto de mesmo comprimento (uma oitava abaixo).



Tubo fechado: ventre na boca, nó no fundo. Só cabem números ímpares de quartos de onda.

A garrafa em que se sopra na boca, o tubo de ensaio, a coluna de ar sobre a água de uma proveta e, de modo aproximado, o clarinete funcionam como tubos fechados.

ERROS COMUNS NO TUBO FECHADO

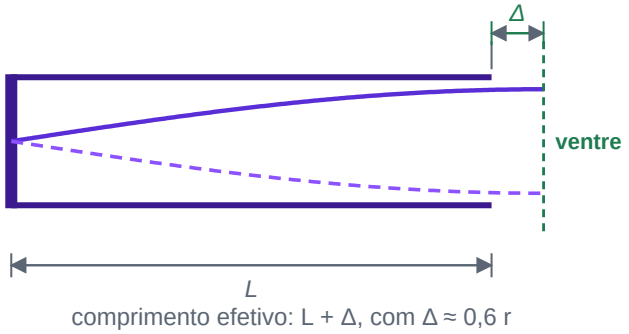
• Em $f_n = n\,\dfrac{v}{4L}$, o n é a **ordem do harmônico** e só pode ser ímpar. Não existe 2º nem 4º harmônico num tubo fechado.

• A segunda frequência de ressonância de um tubo fechado é o **3º harmônico**, $3f_1$, e a terceira é o 5º harmônico. Alguns livros escrevem $f = (2k-1)\dfrac{v}{4L}$ com $k = 1, 2, 3, \ldots$; nesse caso k é a posição na lista de ressonâncias, e não a ordem do harmônico. Leia com atenção o que o enunciado chama de "segundo harmônico" ou de "segundo modo".

• Aplicar a fórmula do tubo aberto ($v/2L$) a um tubo fechado: o resultado sai com o dobro do valor correto.

1.10 Correção de extremidade

O ventre de deslocamento de uma extremidade aberta não fica exatamente na boca do tubo: o ar que oscila ultrapassa um pouco a abertura. O tubo se comporta como se fosse um pouco mais comprido, com comprimento efetivo $L + \Delta$, em que, para um tubo cilíndrico de raio r, $\Delta \approx 0{,}6\,r$ em cada extremidade aberta.



Correção de extremidade: o ventre fica a uma distância Δ além da boca.

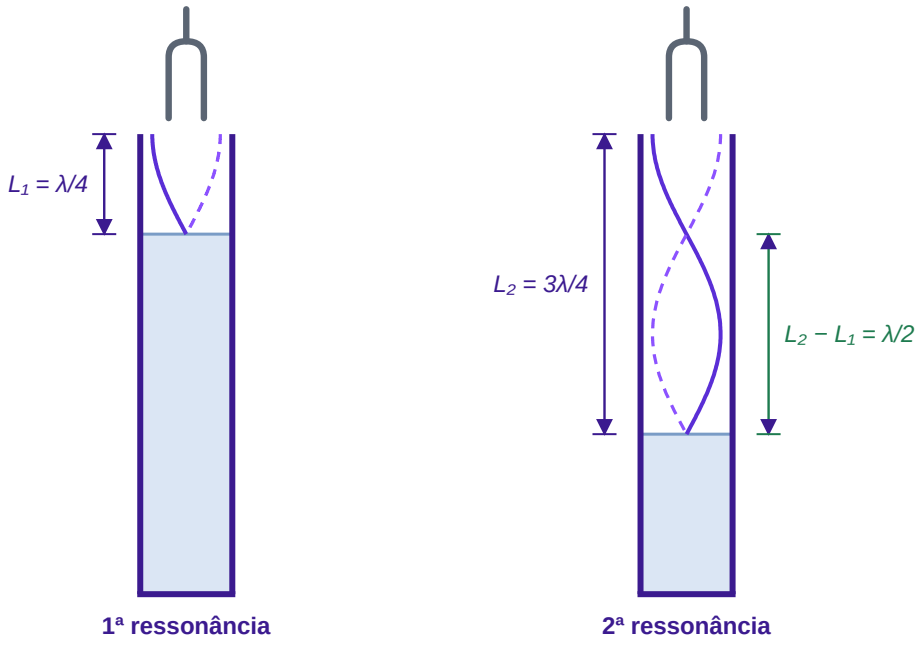
Consequência: as frequências reais são um pouco menores que as calculadas com L. Nos exercícios, salvo aviso, a correção é desprezada. Nas medidas de laboratório ela é eliminada usando a **diferença** entre duas ressonâncias consecutivas (item 1.11).

1.11 Ressonância: medidas com diapasão, cordas e tubos

Um sistema forçado a oscilar numa de suas frequências naturais responde com grande amplitude: é a **ressonância**. Cordas e tubos têm infinitas frequências naturais (os harmônicos), e qualquer uma delas pode ser excitada por uma fonte externa de mesma frequência.

Tubo com nível de água variável. Um diapasão de frequência f conhecida vibra sobre a boca de um tubo vertical parcialmente cheio de água. A água fecha o tubo, e a coluna de ar acima dela é um tubo fechado de comprimento variável. Baixando o nível devagar, o som fica bem mais forte quando a coluna mede

$$L_1 = \frac{\lambda}{4}, \qquad L_2 = \frac{3\lambda}{4}, \qquad L_3 = \frac{5\lambda}{4}, \ \ldots$$



Duas ressonâncias consecutivas da coluna de ar com o mesmo diapasão. A diferença entre os comprimentos é meio comprimento de onda.

MEDIDA DA VELOCIDADE DO SOM

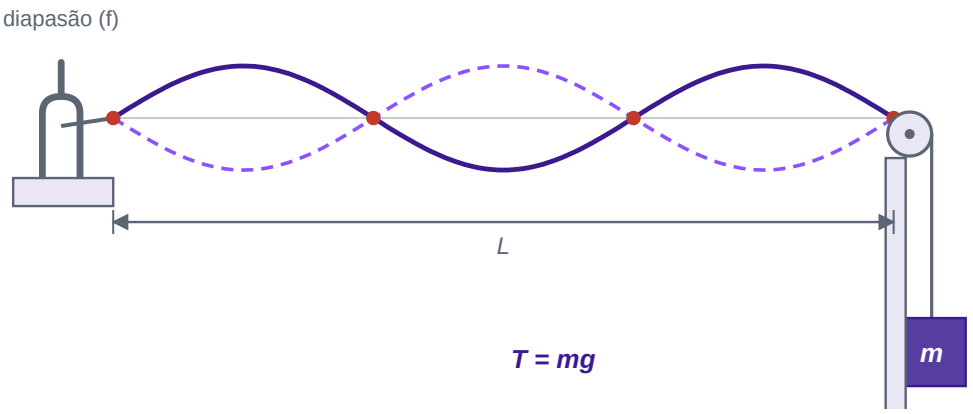
$$L_2 - L_1 = \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2(L_2 - L_1) \quad \Rightarrow \quad v = 2f\,(L_2 - L_1)$$

Usando a diferença, a correção de extremidade se cancela, porque as duas medidas carregam o mesmo Δ. Ela pode ser estimada por $\Delta = \dfrac{\lambda}{4} - L_1$.

Corda excitada por um diapasão (experimento de Melde). Uma das pontas da corda é presa a um diapasão (ou a um vibrador elétrico) de frequência fixa f; a outra passa por uma polia e sustenta um bloco de massa m, que define a tração $F = mg$. A extremidade ligada ao diapasão vibra com amplitude muito pequena e funciona, na prática, como um nó. Mudando a massa, mudam v e $\lambda = v/f$, e o número de fusos que cabe no trecho L:

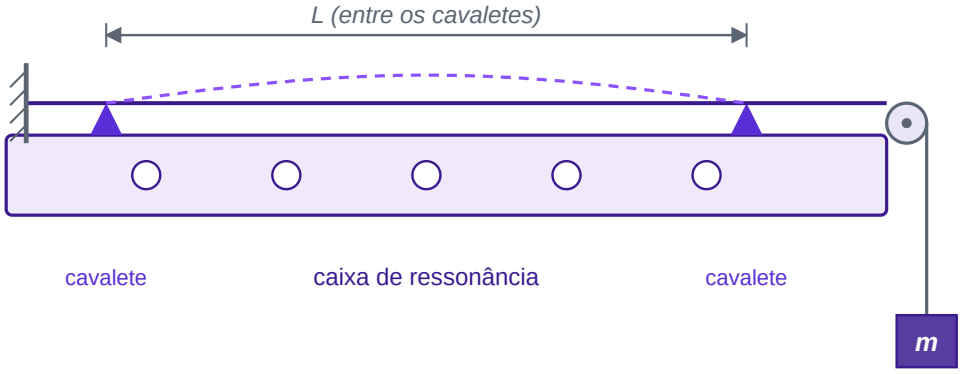
$$L = n\,\frac{\lambda}{2} = \frac{n}{2f}\sqrt{\frac{mg}{\mu}} \quad \Rightarrow \quad n = 2Lf\sqrt{\frac{\mu}{mg}}.$$

Aumentar a massa diminui o número de fusos: $n \propto 1/\sqrt{m}$.



Experimento de Melde: frequência fixada pelo diapasão; a tração, e portanto o número de fusos, é controlada pela massa m.

Sonômetro. É uma caixa de ressonância com uma corda apoiada em dois cavaletes, tracionada por um peso. Movendo um dos cavaletes muda-se o comprimento vibrante; trocando o peso, muda-se a tração. Serve para verificar as leis das cordas e para comparar a corda com um diapasão: quando a frequência fundamental da corda coincide com a do diapasão apoiado na caixa, a corda entra em ressonância (um pequeno cavaleiro de papel colocado sobre ela é lançado longe).



Sonômetro: comprimento vibrante entre os cavaletes, tração dada pelo peso pendurado.

Um alto-falante ligado a um gerador de frequência variável também excita cordas e tubos. Varrendo as frequências, a resposta do sistema mostra picos exatamente nos harmônicos.

1.12 Frequências de ressonância consecutivas

Muitas questões dão duas ressonâncias consecutivas de um sistema, sem dizer qual é o harmônico. A diferença e a razão entre elas resolvem o problema.

Sistema	Harmônicos	Diferença entre consecutivas	Razão entre consecutivas
Corda fixa / tubo aberto	$f_1,\ 2f_1,\ 3f_1,\ \ldots$	f_1	$\frac{n}{n+1}$: $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots$
Tubo fechado	$f_1,\ 3f_1,\ 5f_1,\ \ldots$	$2f_1$	razão de ímpares: $\frac{1}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{7},\ \ldots$

ROTEIRO

1. Calcule $\Delta f = f_{k+1} - f_k$.
2. Divida a menor frequência por Δf. Se der um número inteiro n, todos os harmônicos estão presentes (corda ou tubo aberto): $f_1 = \Delta f$ e as frequências dadas são os harmônicos n e $n+1$.
3. Se der um número terminado em meio ($2{,}5$; $3{,}5$; ...), só há harmônicos ímpares (tubo fechado): $f_1 = \Delta f/2$.

Exemplos: 600 Hz e 750 Hz: $\Delta f = 150$ Hz e $600/150 = 4$; harmônicos 4 e 5 de $f_1 = 150$ Hz. Já 750 Hz e $1\,050$ Hz: $\Delta f = 300$ Hz e $750/300 = 2{,}5$; tubo fechado, $f_1 = 150$ Hz, harmônicos 5 e 7.

1.13 Influência da temperatura e do gás

Num tubo, o comprimento de onda de cada harmônico é fixado pela geometria ($\lambda_n = 2L/n$ ou $4L/n$). Então a frequência é proporcional à velocidade do som no gás: $f_n \propto v$. Como visto na ficha *Natureza e propriedades do som*, num gás ideal

$$v = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}},$$

com T em kelvin, M a massa molar e $\gamma = C_P/C_V$. Daí:

- **Temperatura:** $f \propto \sqrt{T}$. Com o ar mais quente, os instrumentos de sopro ficam mais agudos; por isso o músico costuma afinar depois de aquecer o instrumento soprando. **Exemplo:** um tubo afinado em 440 Hz a 27 °C (300 K) soa, a 7 °C (280 K), em $440\sqrt{280/300} \approx 425$ Hz.
- **Tipo de gás:** no hélio ($M = 4$ g/mol) o som é cerca de três vezes mais rápido que no ar, e todas as ressonâncias de um tubo cheio de hélio sobem na mesma proporção. É o que acontece com as ressonâncias do trato vocal de quem inspira hélio, o que dá à voz o som agudo característico.
- **Cordas:** a frequência de uma corda não depende do ar, mas de F e μ. O calor age por outro caminho: a corda metálica dilata, afrouxa, a tração diminui e a nota **desce**. No calor, os sopros sobem e as cordas descem, e a orquestra precisa reafinar.

ERRO COMUM

Achar que, ao aquecer o ar do tubo, o comprimento de onda dos harmônicos muda. O que muda é a frequência: λ_n depende só de L (desprezando a dilatação do tubo). No problema da corda, o raciocínio se inverte: com F e μ fixos, v não muda, e é λ que acompanha o comprimento L.

1.14 Quadro-resumo

Assunto	Fórmula / regra
Equação fundamental	$v = \lambda f$; a frequência não muda ao trocar de meio
Velocidade na corda (Taylor)	$v = \sqrt{F/\mu}$; $\mu = m/L = \rho A$
Reflexão	extremidade fixa: inverte; extremidade livre: não inverte
Onda estacionária	nó–nó $= \lambda/2$; nó–ventre $= \lambda/4$; $y = 2A\,\mathrm{sen}(kx)\cos(\omega t)$
Corda fixa nas duas pontas	$\lambda_n = \dfrac{2L}{n}$; $f_n = n\dfrac{v}{2L}$; n = número de fusos; todos os harmônicos
Tubo aberto	$f_n = n\dfrac{v}{2L}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$
Tubo fechado	$f_n = n\dfrac{v}{4L}$, $n = 1, 3, 5, \ldots$ (só ímpares)
Correção de extremidade	$L_{ef} = L + \Delta$, $\Delta \approx 0{,}6\,r$ por extremidade aberta
Ressonância com nível de água	$L_2 - L_1 = \lambda/2$; $v = 2f(L_2 - L_1)$
Ressonâncias consecutivas	diferença $= f_1$ (corda, tubo aberto) ou $2f_1$ (tubo fechado)
Temperatura e gás (tubos)	$f \propto v = \sqrt{\gamma RT/M}$

2. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

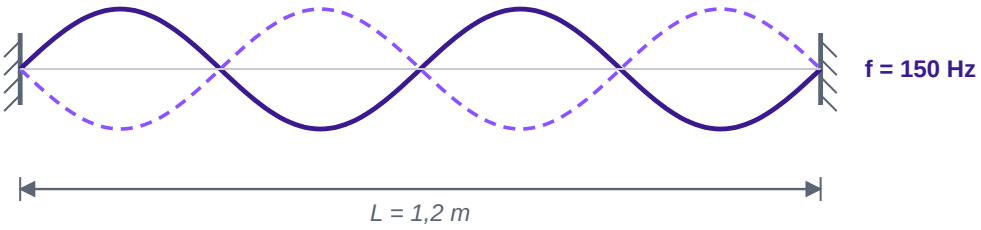
Exercício resolvido 1. Uma corda de $2{,}0$ m de comprimento e massa de 20 g é esticada com tração de 100 N, com as extremidades fixas. Determine (a) a densidade linear da corda; (b) a velocidade das ondas na corda; (c) a frequência fundamental; (d) a tração necessária para dobrar a velocidade das ondas.

Resolução:

1. **(a)** $\mu = \dfrac{m}{L} = \dfrac{0{,}020}{2{,}0} = 0{,}010$ kg/m.
2. **(b)** $v = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{100}{0{,}010}} = \sqrt{10^4} = 100$ m/s.
3. **(c)** $f_1 = \dfrac{v}{2L} = \dfrac{100}{4{,}0} = 25$ Hz.
4. **(d)** Como $v \propto \sqrt{F}$, para dobrar v a tração deve ser multiplicada por 4: $F' = 400$ N.

Resposta: (a) $0{,}010$ kg/m; (b) 100 m/s; (c) 25 Hz; (d) 400 N

Exercício resolvido 2. A figura mostra uma corda de $1{,}2$ m, presa nas duas extremidades, vibrando com frequência de 150 Hz. Determine (a) o comprimento de onda; (b) a velocidade das ondas na corda; (c) a frequência fundamental; (d) o número de nós e de ventres.



Corda vibrando em regime estacionário.

Resolução:

1. **Contagem:** há 4 fusos; logo é o 4º harmônico e $L = 4 \cdot \dfrac{\lambda}{2} = 2\lambda$.
2. **(a)** $\lambda = \dfrac{L}{2} = 0{,}60$ m.
3. **(b)** $v = \lambda f = 0{,}60 \cdot 150 = 90$ m/s.
4. **(c)** $f_1 = \dfrac{f_4}{4} = \dfrac{150}{4} = 37{,}5$ Hz. Conferindo: $\dfrac{v}{2L} = \dfrac{90}{2{,}4} = 37{,}5$ Hz.
5. **(d)** 4 ventres e 5 nós, contando as duas extremidades (3 nós entre elas).

Resposta: (a) $0{,}60$ m; (b) 90 m/s; (c) $37{,}5$ Hz; (d) 5 nós e 4 ventres

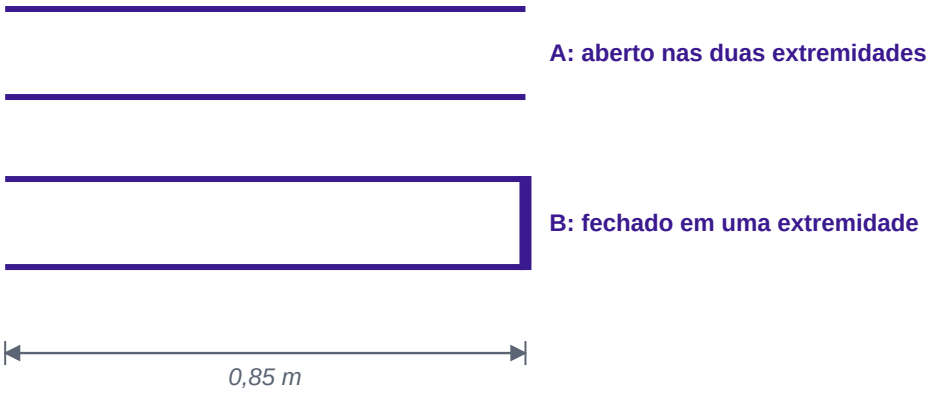
Exercício resolvido 3. A corda lá de um piano é um fio de aço ($\rho = 7{,}8 \times 10^3$ kg/m³) com diâmetro de $0{,}30$ mm e comprimento vibrante de 65 cm. Para que a sua frequência fundamental seja 440 Hz, qual deve ser a tração? Use $\pi = 3{,}14$.

Resolução:

1. **Área da seção:** $A = \dfrac{\pi d^2}{4} = \dfrac{3{,}14 \cdot (3{,}0 \times 10^{-4})^2}{4} \approx 7{,}07 \times 10^{-8}$ m².
2. **Densidade linear:** $\mu = \rho A = 7{,}8 \times 10^3 \cdot 7{,}07 \times 10^{-8} \approx 5{,}51 \times 10^{-4}$ kg/m.
3. **Velocidade exigida:** no fundamental $\lambda = 2L = 1{,}30$ m, então $v = \lambda f = 1{,}30 \cdot 440 = 572$ m/s.
4. **Tração:** $F = \mu v^2 = 5{,}51 \times 10^{-4} \cdot 572^2 \approx 180$ N, equivalente ao peso de um corpo de 18 kg.

Resposta: $F \approx 1{,}8 \times 10^2$ N

Exercício resolvido 4. Os tubos A e B da figura têm o mesmo comprimento, $0{,}85$ m. A é aberto nas duas extremidades e B é fechado em uma delas. Considerando $v_{som} = 340$ m/s e desprezando a correção de extremidade, determine as três menores frequências de ressonância de cada tubo e o comprimento de onda do som fundamental de cada um.



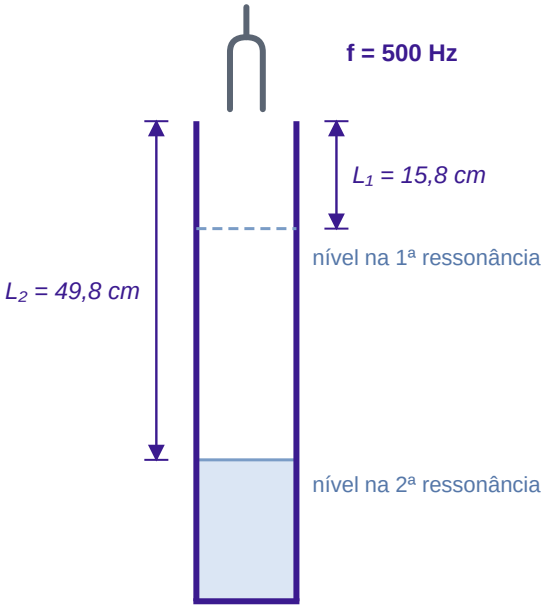
Tubos de mesmo comprimento, um aberto e um fechado.

Resolução:

1. **Tubo A (aberto):** $f_1 = \dfrac{v}{2L} = \dfrac{340}{1{,}70} = 200$ Hz. Todos os harmônicos: 200, 400 e 600 Hz. $\lambda_1 = 2L = 1{,}70$ m.
2. **Tubo B (fechado):** $f_1 = \dfrac{v}{4L} = \dfrac{340}{3{,}40} = 100$ Hz. Só harmônicos ímpares: 100, 300 e 500 Hz. $\lambda_1 = 4L = 3{,}40$ m.
3. **Comparação:** o fundamental do tubo fechado está uma oitava abaixo do aberto, e a frequência 200 Hz, que é a fundamental de A, não existe em B.

Resposta: A: 200, 400 e 600 Hz ($\lambda_1 = 1{,}7$ m); B: 100, 300 e 500 Hz ($\lambda_1 = 3{,}4$ m)

Exercício resolvido 5. Um diapasão de 500 Hz vibra sobre a boca de um tubo vertical cujo nível de água é baixado lentamente. O som fica mais intenso pela primeira vez quando a coluna de ar mede $15{,}8$ cm e pela segunda vez quando mede $49{,}8$ cm. Determine (a) a velocidade do som no ar; (b) a correção de extremidade; (c) o comprimento da coluna de ar na terceira ressonância.



Medida da velocidade do som com coluna de ar de comprimento variável.

Resolução:

1. **Duas ressonâncias consecutivas** de um tubo fechado diferem de $\lambda/2$: $\dfrac{\lambda}{2} = 49{,}8 - 15{,}8 = 34{,}0$ cm, então $\lambda = 68{,}0$ cm.

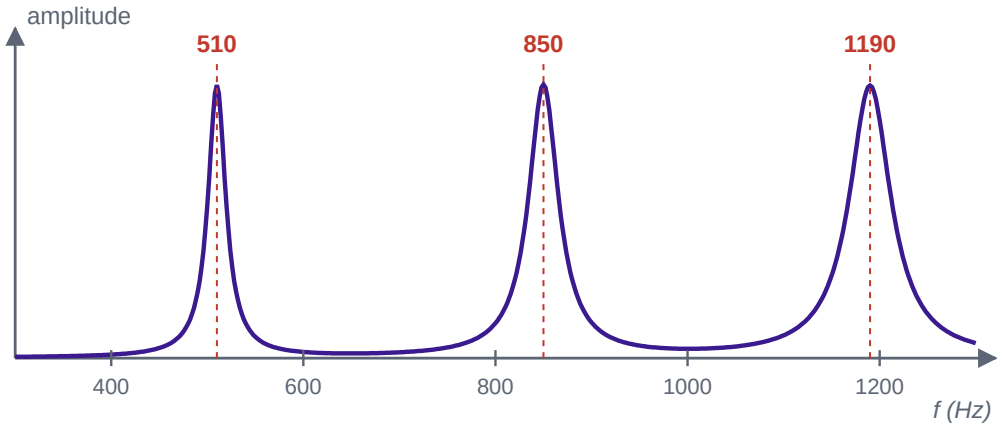
2. **(a)** $v = \lambda f = 0{,}680 \cdot 500 = 340$ m/s.

3. **(b)** Sem correção, a primeira ressonância seria em $\lambda/4 = 17{,}0$ cm. A medida, $15{,}8$ cm, é menor porque o ventre fica além da boca: $\Delta = 17{,}0 - 15{,}8 = 1{,}2$ cm (o que indica um tubo de raio próximo de $1{,}2/0{,}6 = 2$ cm).

4. **(c)** A próxima ressonância está mais $\lambda/2$ abaixo: $L_3 = 49{,}8 + 34{,}0 = 83{,}8$ cm.

Resposta: (a) 340 m/s; (b) $1{,}2$ cm; (c) $83{,}8$ cm

Exercício resolvido 6. Um alto-falante ligado a um gerador de frequência variável é colocado junto à boca de um tubo. O gráfico mostra a amplitude do som dentro do tubo quando a frequência varia de 300 Hz a $1\,300$ Hz. Com $v_{som} = 340$ m/s, o tubo é aberto ou fechado? Qual é o seu comprimento?



Resposta do tubo em função da frequência do alto-falante.

Resolução:

1. **Diferença entre picos consecutivos:** $850 - 510 = 1\,190 - 850 = 340$ Hz.

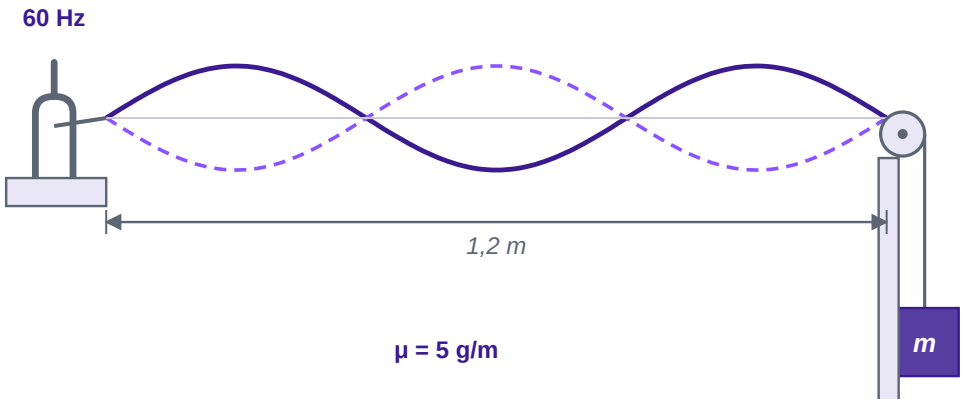
2. **Teste:** $\dfrac{510}{340} = 1{,}5$, que não é inteiro. Se todos os harmônicos estivessem presentes, as frequências seriam múltiplos inteiros de 340 Hz. Logo o tubo é **fechado** e $2f_1 = 340$ Hz, isto é, $f_1 = 170$ Hz.

3. **Conferência:** $510 = 3 \cdot 170$, $850 = 5 \cdot 170$ e $1\,190 = 7 \cdot 170$: harmônicos 3, 5 e 7. O fundamental (170 Hz) está fora da faixa do gráfico.

4. **Comprimento:** $L = \dfrac{v}{4f_1} = \dfrac{340}{680} = 0{,}50$ m.

Resposta: tubo fechado, $L = 0{,}50$ m

Exercício resolvido 7. No arranjo da figura, a corda tem densidade linear de $5{,}0$ g/m e está ligada a um diapasão de 60 Hz; ela passa por uma polia e sustenta um bloco de massa m. O trecho que vibra, entre o diapasão e a polia, mede $1{,}2$ m e forma três fusos. Use $g = 10$ m/s². (a) Qual é a massa m? (b) Que massa faria a corda vibrar com dois fusos? (c) E com um só fuso?



Corda excitada por diapasão com tração ajustada por um bloco.

Resolução:

1. **Comprimento de onda:** três fusos em $1{,}2$ m: $\lambda = \dfrac{2L}{3} = 0{,}80$ m.
2. **Velocidade:** $v = \lambda f = 0{,}80 \cdot 60 = 48$ m/s.
3. **(a) Tração e massa:** $F = \mu v^2 = 5{,}0 \times 10^{-3} \cdot 48^2 = 11{,}52$ N; $m = F/g \approx 1{,}15$ kg.
4. **Relação geral:** com f e L fixos, $n = 2Lf\sqrt{\mu/(mg)}$, logo $m \propto \dfrac{1}{n^2}$.
5. **(b)** $m_2 = m_3 \cdot \dfrac{3^2}{2^2} = 1{,}152 \cdot 2{,}25 \approx 2{,}59$ kg. **(c)** $m_1 = 9\,m_3 \approx 10{,}4$ kg.

Resposta: (a) $\approx 1{,}15$ kg; (b) $\approx 2{,}59$ kg; (c) $\approx 10{,}4$ kg

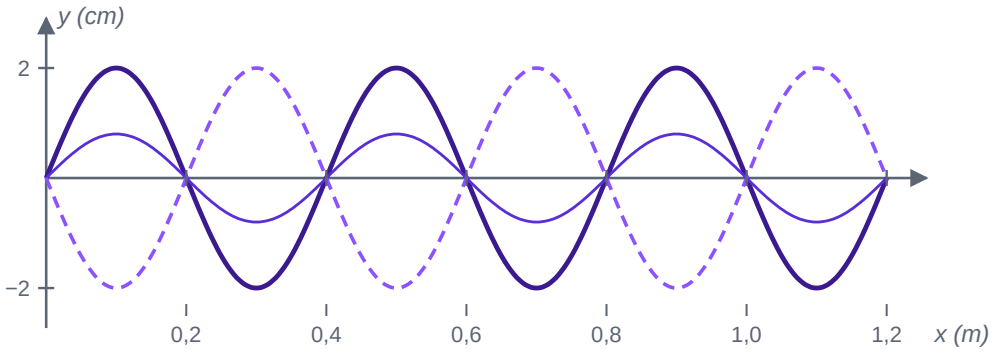
Exercício resolvido 8. Uma flauta, que se comporta como um tubo aberto, é afinada para emitir 440 Hz numa sala a 20 °C. (a) Que frequência ela emitirá, na mesma posição dos dedos, num palco a 35 °C? Despreze a dilatação da flauta. (b) Se o tubo fosse preenchido com hélio a 20 °C, qual seria a frequência? Dados: $v = \sqrt{\gamma RT/M}$; ar: $\gamma = 1{,}40$ e $M = 29$ g/mol; hélio: $\gamma = 1{,}67$ e $M = 4{,}0$ g/mol.

Resolução:

1. **Ideia:** o comprimento de onda do modo é fixado pelo tubo; então $f \propto v$.
2. **(a)** $v \propto \sqrt{T}$ (kelvin): $f' = 440\sqrt{\dfrac{308}{293}} \approx 440 \cdot 1{,}025 \approx 451$ Hz. A flauta fica cerca de 11 Hz mais aguda.
3. **(b)** Mesma temperatura, gases diferentes: $\dfrac{v_{He}}{v_{ar}} = \sqrt{\dfrac{\gamma_{He}\,M_{ar}}{\gamma_{ar}\,M_{He}}} = \sqrt{\dfrac{1{,}67 \cdot 29}{1{,}40 \cdot 4{,}0}} \approx \sqrt{8{,}65} \approx 2{,}94.$
4. $f_{He} \approx 2{,}94 \cdot 440 \approx 1{,}29 \times 10^3$ Hz.

Resposta: (a) ≈ 451 Hz; (b) $\approx 1{,}29$ kHz

Exercício resolvido 9. Numa corda de $1{,}2$ m, presa em $x = 0$ e em $x = 1{,}2$ m, forma-se a onda estacionária $y = 0{,}02\,\mathrm{sen}(5\pi x)\cos(200\pi t)$, em unidades do SI. Determine (a) o comprimento de onda e a frequência; (b) a velocidade e a amplitude das ondas que, superpostas, formam a estacionária; (c) o harmônico em que a corda vibra; (d) as posições dos nós; (e) a amplitude de oscilação do ponto $x = 0{,}05$ m; (f) a velocidade máxima de um ponto de ventre.



y = 0,02 sen(5πx) cos(200πt) (SI), em t = 0 e em instantes posteriores

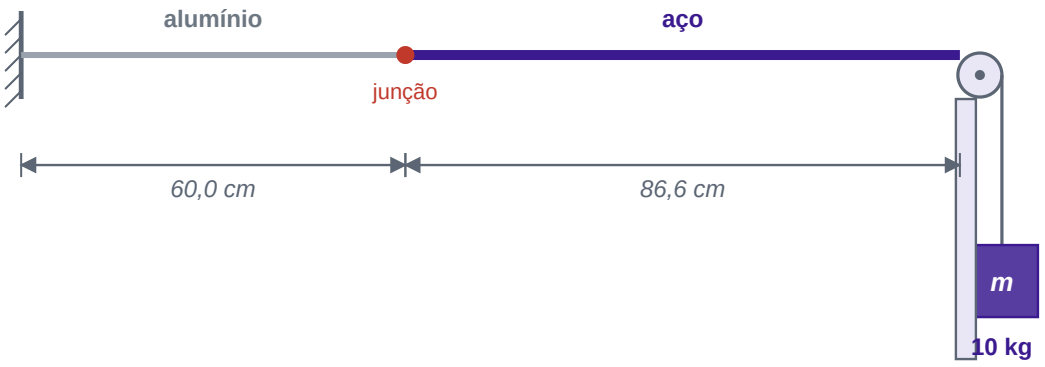
Perfil da corda em alguns instantes.

Resolução:

1. **(a)** Comparando com $y = 2A\,\mathrm{sen}(kx)\cos(\omega t)$: $k = 5\pi$ rad/m, então $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = 0{,}40$ m; $\omega = 200\pi$ rad/s, então $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 100$ Hz.
2. **(b)** $v = \lambda f = 0{,}40 \cdot 100 = 40$ m/s (ou $v = \omega/k$). Como $2A = 0{,}02$ m, cada onda tem amplitude $A = 0{,}01$ m.
3. **(c)** $n = \dfrac{2L}{\lambda} = \dfrac{2{,}4}{0{,}40} = 6$: 6º harmônico, com 6 fusos.
4. **(d)** Nós: $\mathrm{sen}(5\pi x) = 0 \Rightarrow 5\pi x = j\pi \Rightarrow x = 0{,}2\,j$ m. Na corda: 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0 e 1,2 m (7 nós).
5. **(e)** Amplitude em $x = 0{,}05$ m: $0{,}02\left|\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right| = 0{,}02 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}4 \times 10^{-2}$ m.
6. **(f)** No ventre o ponto faz MHS de amplitude $0{,}02$ m e pulsação ω: $v_{máx} = \omega \cdot 0{,}02 = 200\pi \cdot 0{,}02 = 4\pi \approx 12{,}6$ m/s. Essa velocidade transversal não tem relação com a velocidade de propagação (40 m/s).

Resposta: (a) $0{,}40$ m e 100 Hz; (b) 40 m/s e $0{,}01$ m; (c) 6º; (d) $x = 0{,}2\,j$ m, $j = 0, \ldots, 6$; (e) $\approx 1{,}4$ cm; (f) $4\pi \approx 12{,}6$ m/s

Exercício resolvido 10. Um fio de alumínio de $60{,}0$ cm, com seção de $1{,}00$ mm² e densidade $2{,}60$ g/cm³, é soldado a um fio de aço de mesma seção, densidade $7{,}80$ g/cm³ e comprimento $86{,}6$ cm. O conjunto está preso a uma parede, passa por uma polia e sustenta um bloco de $10{,}0$ kg (figura; use $g = 10$ m/s²). Uma fonte externa de frequência variável produz ondas estacionárias no fio, com a junção sendo um nó. Determine a menor frequência em que isso ocorre e o número total de nós, incluindo as extremidades.



Fio composto: alumínio e aço soldados, sob a mesma tração.

Resolução:

1. **Densidades lineares** ($A = 1{,}00 \times 10^{-6}$ m²): $\mu_{Al} = 2\,600 \cdot 10^{-6} = 2{,}60 \times 10^{-3}$ kg/m e $\mu_{aço} = 7{,}80 \times 10^{-3}$ kg/m.
2. **Velocidades** ($F = 100$ N nos dois trechos): $v_{Al} = \sqrt{\dfrac{100}{2{,}60 \times 10^{-3}}} \approx 196{,}1$ m/s e $v_{aço} = \sqrt{\dfrac{100}{7{,}80 \times 10^{-3}}} \approx 113{,}2$ m/s.
3. **Condição:** cada trecho é uma corda fixa nas duas pontas (parede e junção; junção e polia), vibrando com a mesma frequência f da fonte:
$$f = n_{Al}\,\frac{v_{Al}}{2L_{Al}} = n_{aço}\,\frac{v_{aço}}{2L_{aço}}.$$
4. **Fundamentais de cada trecho:** $\dfrac{196{,}1}{1{,}200} \approx 163{,}4$ Hz e $\dfrac{113{,}2}{1{,}732} \approx 65{,}4$ Hz. A razão é $\dfrac{163{,}4}{65{,}4} \approx 2{,}5 = \dfrac{5}{2}$, então $\dfrac{n_{aço}}{n_{Al}} = \dfrac{5}{2}$.
5. **Menor frequência:** $n_{Al} = 2$ e $n_{aço} = 5$: $f = 2 \cdot 163{,}4 \approx 327$ Hz.
6. **Nós:** 2 fusos no alumínio (3 nós) e 5 no aço (6 nós); a junção é comum aos dois: $3 + 6 - 1 = 8$ nós. Os comprimentos de onda são diferentes nos dois trechos: $\lambda_{Al} = 0{,}60$ m e $\lambda_{aço} \approx 0{,}35$ m.

Resposta: $f \approx 327$ Hz, com 8 nós

3. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Quando necessário, use $g = 10$ m/s² e despreze a correção de extremidade.

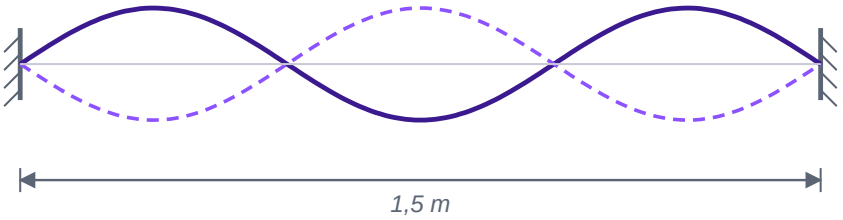
Nível 1 básico

01 Numa onda estacionária de comprimento de onda 60 cm, a distância entre dois nós consecutivos é:

(A) 15 cm
(B) 30 cm
(C) 45 cm
(D) 60 cm
(E) 120 cm

02 A corda sol de um violão tem 65 cm de comprimento vibrante e frequência fundamental de 196 Hz. Determine (a) a velocidade das ondas na corda; (b) as frequências do 2º e do 3º harmônicos; (c) o comprimento de onda, no ar, do som fundamental emitido, sabendo que $v_{som} = 343$ m/s.

03 A corda da figura, presa nas duas extremidades, mede $1{,}5$ m, e as ondas se propagam nela a 60 m/s. Determine o comprimento de onda e a frequência do modo representado, e a frequência fundamental da corda.

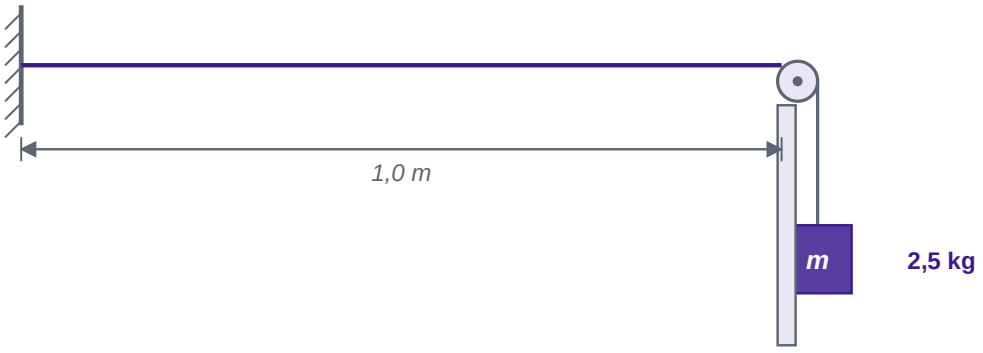


04 O tubo da figura, fechado em uma extremidade, tem frequência fundamental de 120 Hz. A lista que contém **apenas** frequências nas quais esse tubo pode entrar em ressonância é:



(A) 60, 120 e 180 Hz
(B) 120, 240 e 360 Hz
(C) 120, 360 e 600 Hz
(D) 240, 480 e 720 Hz
(E) 120, 180 e 240 Hz

05 Na figura, uma corda de $2{,}0$ m de comprimento total e massa de 20 g está presa à parede, passa por uma polia ideal e sustenta um bloco de $2{,}5$ kg em repouso. O trecho horizontal entre a parede e a polia mede $1{,}0$ m. Determine (a) a densidade linear da corda; (b) a velocidade das ondas na corda; (c) a frequência fundamental do trecho horizontal.



06 A frequência fundamental de uma corda de violão aumenta quando:

(A) a tração na corda diminui.

(B) a corda é tocada com mais força.

(C) a corda é trocada por outra, do mesmo material, mais grossa.

(D) o comprimento vibrante aumenta.

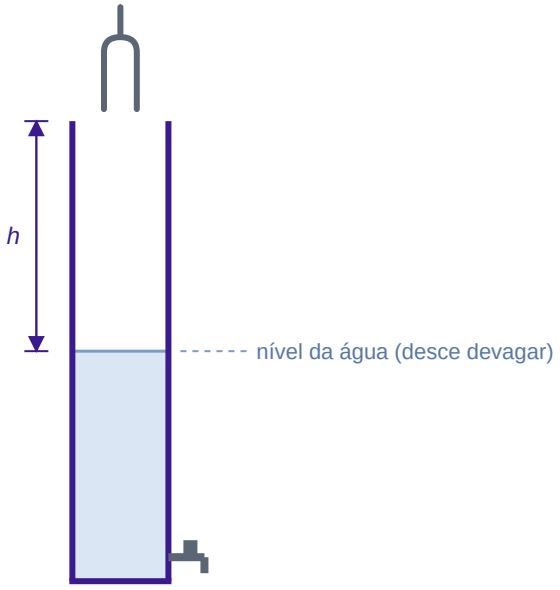
(E) o violonista pressiona a corda num traste, reduzindo o comprimento vibrante.

Nível 2 intermediário

07 Um tubo de $0{,}50$ m, aberto nas duas extremidades, contém ar em que o som se propaga a 340 m/s. (a) Quais são as três menores frequências de ressonância? (b) E se uma das extremidades for tampada?

08 Um fio de cobre ($\rho = 8{,}9$ g/cm³) com seção de $1{,}0$ mm² é esticado com tração de 89 N entre dois suportes separados por 50 cm. Determine a densidade linear do fio, a velocidade das ondas nele e a sua frequência fundamental.

09 Na montagem da figura, a água escoa lentamente pela torneira e o som do diapasão é reforçado quando $h = 16$ cm e, novamente, quando $h = 50$ cm, sem outro reforço entre esses valores. Com $v_{som} = 340$ m/s, a frequência do diapasão é:



(A) 250 Hz

(B) 340 Hz

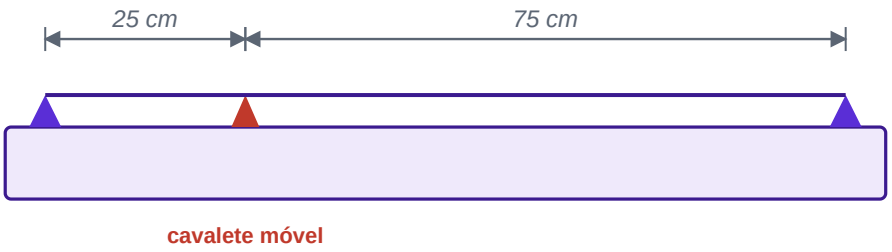
(C) 425 Hz

(D) 500 Hz

(E) $1\,000$ Hz

10 Um tubo sonoro entra em ressonância em 300 Hz e em 420 Hz, e em nenhuma frequência entre esses valores. Com $v_{som} = 336$ m/s, determine (a) se o tubo é aberto ou fechado; (b) a sua frequência fundamental; (c) o seu comprimento; (d) a ordem dos harmônicos de 300 Hz e 420 Hz.

11 Num sonômetro, a corda entre os cavaletes fixos mede $1{,}0$ m e vibra com frequência fundamental de 120 Hz. Um cavalete móvel é colocado sob a corda a 25 cm de uma das extremidades, como na figura, sem alterar a tração. A frequência fundamental do trecho maior passa a ser:



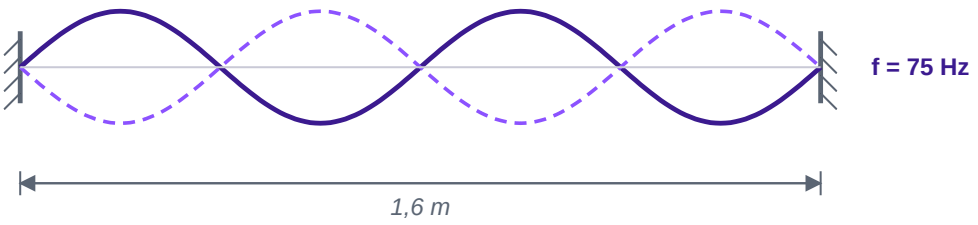
(A) 90 Hz
(B) 120 Hz
(C) 160 Hz
(D) 360 Hz
(E) 480 Hz

12 Um alto-falante, ligado a um gerador cuja frequência pode variar de 200 Hz a $1\,500$ Hz, é colocado junto à boca de um tubo de 25 cm fechado na outra extremidade (figura). Com $v_{som} = 340$ m/s, em que frequências dessa faixa o som no tubo será reforçado?



Nível 3 avançado

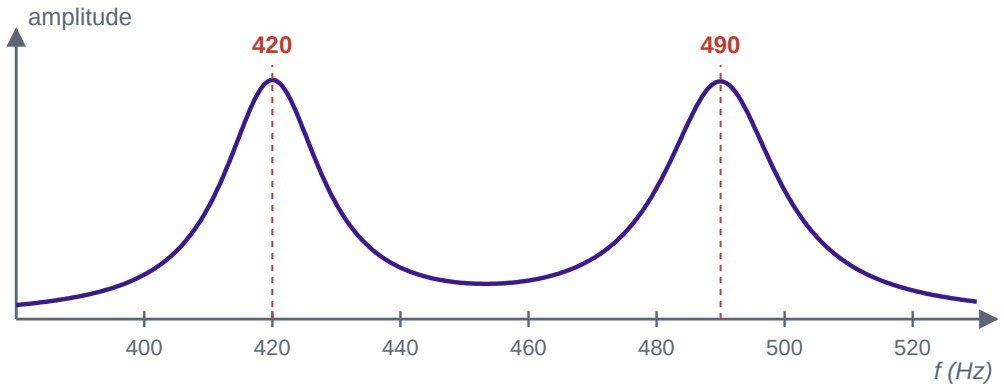
13 A corda da figura, de densidade linear $2{,}5$ g/m e presa nas extremidades, vibra com frequência de 75 Hz no padrão mostrado. A tração na corda vale:



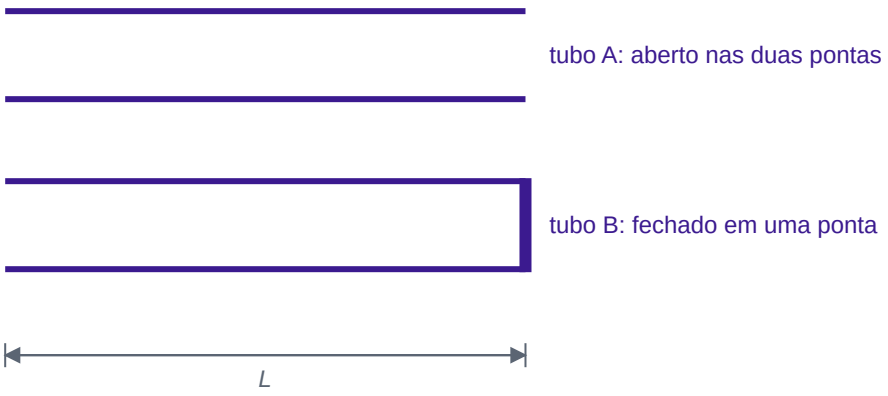
(A) $4{,}5$ N
(B) $9{,}0$ N
(C) 12 N
(D) 15 N
(E) 18 N

14 Um tubo aberto de $0{,}85$ m está cheio de ar a 27 °C, temperatura em que o som se propaga a 340 m/s. (a) Qual é a frequência fundamental? (b) O ar do tubo é aquecido até 90 °C. Sabendo que a velocidade do som é proporcional à raiz quadrada da temperatura absoluta, qual passa a ser a frequência fundamental? (c) O comprimento de onda do som fundamental dentro do tubo mudou? Despreze a dilatação do tubo.

15 Uma corda de violão de $0{,}70$ m, com densidade linear de $5{,}0$ g/m, fica próxima de um alto-falante de frequência ajustável. O gráfico mostra a amplitude de vibração da corda quando a frequência varia de 380 Hz a 530 Hz. Determine (a) a frequência fundamental e a ordem dos harmônicos que aparecem no gráfico; (b) a velocidade das ondas na corda; (c) a tração.

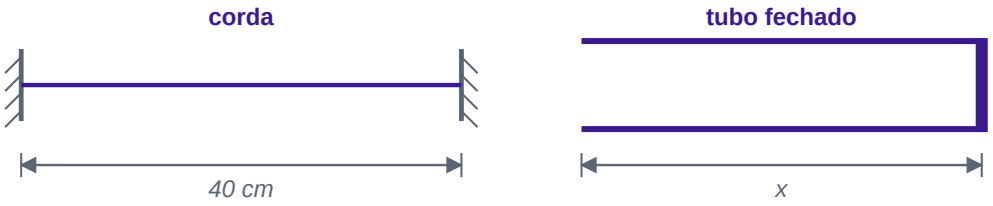


16 Os tubos A e B da figura têm o mesmo comprimento e contêm ar nas mesmas condições. A razão entre a segunda frequência de ressonância do tubo A e a segunda frequência de ressonância do tubo B é:



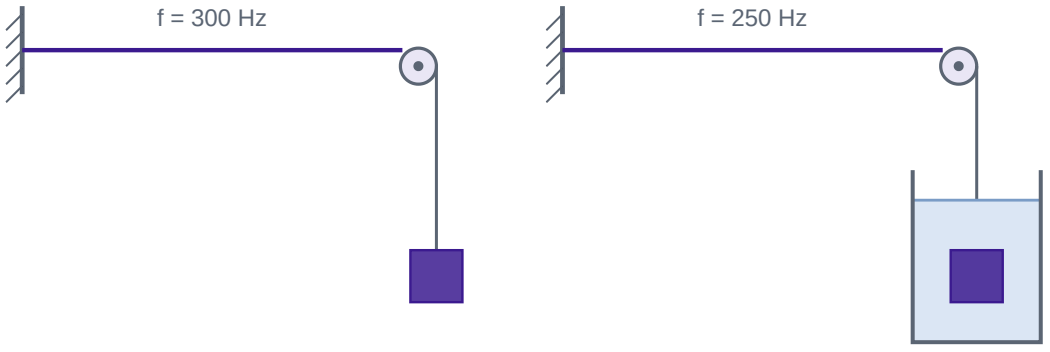
(A) $\frac{1}{2}$
(B) $\frac{2}{3}$
(C) $\frac{3}{4}$
(D) 1
(E) $\frac{4}{3}$

17 Uma corda de 40 cm, de densidade linear $2{,}0$ g/m, presa nas extremidades e tracionada com $115{,}2$ N, vibra no modo fundamental perto da boca de um tubo fechado de comprimento x (figura). Com $v_{som} = 340$ m/s, determine (a) a frequência do som emitido pela corda; (b) o comprimento de onda desse som na corda e no ar; (c) o menor valor de x para que o tubo entre em ressonância com a corda; (d) o menor comprimento de um tubo **aberto** que também ressoaria.



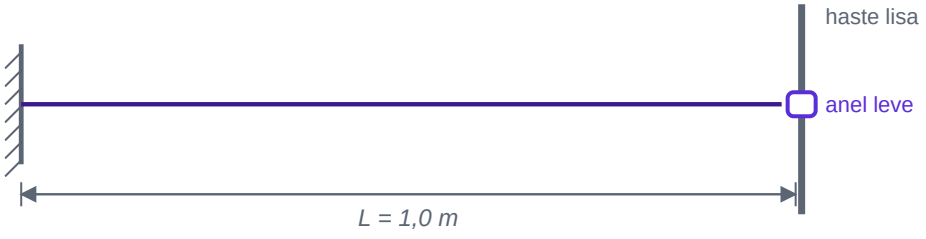
Nível ITA/IME olímpico

18 Uma corda horizontal, presa a uma parede, passa por uma polia ideal e sustenta um bloco maciço. Com o bloco no ar, o trecho horizontal vibra no modo fundamental com 300 Hz. Quando o bloco fica totalmente imerso em água ($1{,}0$ g/cm³), sem tocar o fundo do recipiente, a frequência fundamental passa a 250 Hz (figura). (a) Qual é a densidade do bloco? (b) Qual seria a frequência fundamental com o bloco imerso num óleo de densidade $0{,}80$ g/cm³?

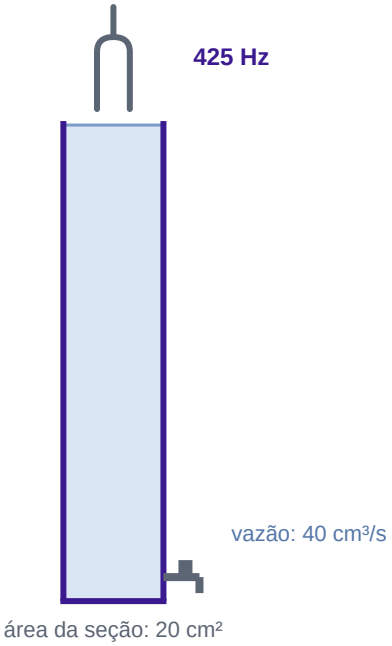


(a) bloco no ar **(b) bloco imerso em água**

19 Uma corda de $1{,}0$ m tem uma extremidade presa a uma parede e a outra presa a um anel de massa desprezível, que desliza sem atrito numa haste vertical (figura). As ondas se propagam na corda a 80 m/s. (a) Que condição de nó ou ventre vale em cada extremidade? (b) Determine os comprimentos de onda possíveis para ondas estacionárias e as três menores frequências. (c) Que tipo de tubo sonoro tem a mesma série de harmônicos? (d) Quantos nós há na corda no terceiro modo de vibração (o terceiro em ordem crescente de frequência), e onde estão?



20 Um tubo cilíndrico vertical, de seção 20 cm² e bem comprido, está inicialmente cheio de água até a borda. Um diapasão de 425 Hz vibra sobre a boca, e a água é escoada por uma torneira com vazão constante de 40 cm³/s (figura). Com $v_{som} = 340$ m/s, o intervalo de tempo entre duas ressonâncias consecutivas é:



(A) $2{,}5$ s
(B) $5{,}0$ s
(C) 10 s
(D) 20 s
(E) 40 s

21 Um tubo de $0{,}50$ m, cheio de um gás desconhecido a 300 K, é excitado por um alto-falante de frequência variável. Duas ressonâncias consecutivas ocorrem em $2\,500$ Hz e $3\,500$ Hz. (a) O tubo é aberto ou fechado? (b) Qual é a velocidade do som no gás e a que harmônicos correspondem as frequências dadas? (c) Sabendo que o gás é monoatômico ($\gamma = 5/3$), determine a sua massa molar e identifique o gás. Use $R = 8{,}3$ J/(mol·K) e $v = \sqrt{\gamma RT/M}$.

4. QUESTÕES OFICIAIS DE VESTIBULARES E CONCURSOS

Questões oficiais de provas anteriores da EFOMM, da Escola Naval, da EsPCEx e da AFA, selecionadas do banco de questões da Trilha Militares.

22 [EsPCEx 2022]

Uma corda homogênea de seção transversal constante e de comprimento 15,60 m é esticada na horizontal e suas extremidades são presas a paredes paralelas e opostas. Uma onda estacionária é estabelecida nessa corda de modo que se formam apenas três ventres entre as suas extremidades. Sabendo que a velocidade de propagação da onda na corda é de 2,60 m/s, podemos afirmar que a frequência da onda é de:

(A) 0,15 Hz
(B) 0,25 Hz
(C) 0,50 Hz
(D) 2,00 Hz
(E) 4,00 Hz

23 [EFOMM 2016]

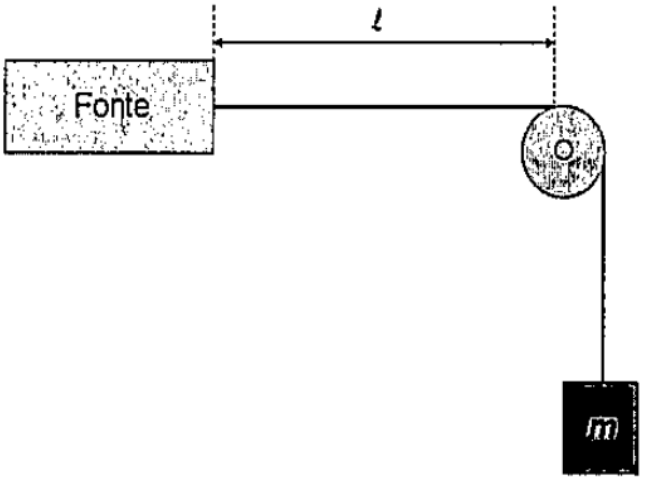
Um diapasão com frequência natural de 400 Hz é percutido na proximidade da borda de uma proveta graduada, perfeitamente cilíndrica, inicialmente cheia de água, mas que está sendo vagarosamente esvaziada por meio de uma pequena torneira na sua parte inferior. Observa-se que o volume do som do diapasão torna-se mais alto pela primeira vez quando a coluna de ar formada acima d'água atinge uma certa altura h. O valor de h, em centímetros, vale

Dado: velocidade do som no ar $v_{Som} = 320$ m/s.

(A) 45
(B) 36
(C) 28
(D) 20
(E) 18

24 [Escola Naval 2020]

No esquema da figura abaixo, uma fonte coloca uma corda a vibrar, no modo fundamental, com uma frequência de 200 Hz. Considere que a corda seja inextensível e a polia ideal. Considere ainda que a massa do bloco nessa situação seja 4 kg e a distância l igual a 50 cm. Quadruplicando a massa do bloco, qual seria a nova frequência de oscilação se a corda fosse posta a vibrar novamente no modo fundamental? (Dado: g = 10 m/s²)



(A) 100 Hz
(B) 200 Hz
(C) 300 Hz

(D) 400 Hz
(E) 500 Hz

25 [Escola Naval 2021]

Um tubo cilíndrico, com ar no seu interior e uma extremidade fechada e outra aberta, possui um comprimento de 0,500 m e um diâmetro de 8,00 cm. Um alto falante, que emite sons na faixa de frequências de 600 Hz a 1000 Hz, é posicionado próximo à extremidade aberta do tubo. Calcule em qual frequência emitida pelo alto falante o som entra em ressonância dentro do tubo e assinale a opção correta. Dado: $v_{som} = 340$ m/s.

(A) 680 Hz
(B) 720 Hz
(C) 780 Hz
(D) 850 Hz
(E) 910 Hz

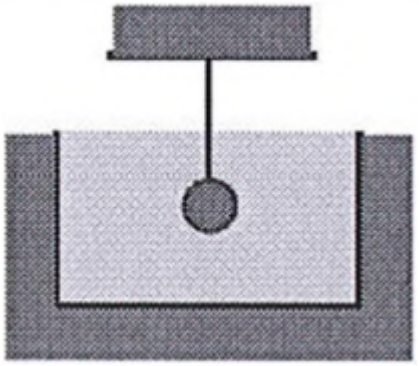
26 [EFOMM 2023]

Ao tocar-se a corda de um violão, cujas extremidades estão fixas, verificou-se (com auxílio de um aplicativo de celular) que, no modo que vibrou com 3 ventres, foi emitido um som com $600\,\text{Hz}$ de frequência. O violonista, então, prendeu a corda com um dedo, diminuindo a distância entre as extremidades fixas, e verificou que, no modo de vibração com apenas 1 ventre, foi emitido um som com $800\,\text{Hz}$. Que fração do comprimento da corda vibrou quando o violonista a tocou pela segunda vez?

(A) $1/2$
(B) $1/3$
(C) $1/4$
(D) $1/8$
(E) $1/10$

27 [EFOMM 2018]

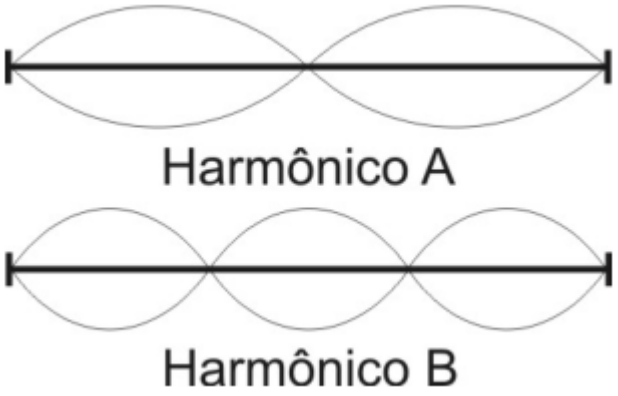
Na figura abaixo, uma corda é presa a um suporte e tensionada por um corpo esférico de 500 g, que se encontra totalmente imerso em um recipiente contendo água. Determine a velocidade com que se propaga uma onda na corda. Considere a corda como um fio ideal. (Dados: massa específica da água = 1 g/cm³; volume da esfera = 0,1 dm³; densidade da corda = 1,2 g/m; aceleração da gravidade = 10 m/s².)



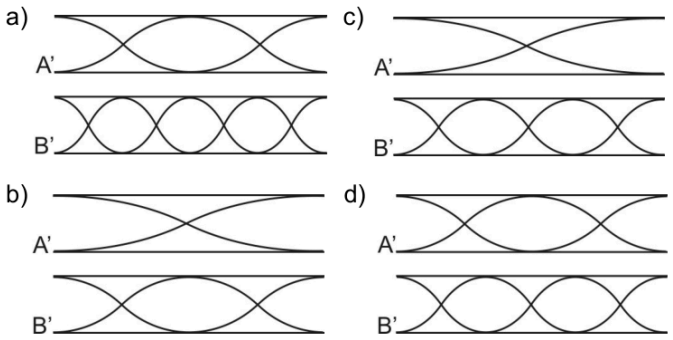
(A) 47,3 m/s
(B) 49 m/s
(C) 52,1 m/s
(D) 54,5 m/s
(E) 57,7 m/s

28 [AFA 2019]

A figura abaixo representa dois harmônicos A e B, de frequências, respectivamente, iguais a f_A e f_B, que podem ser estabelecidos em uma mesma corda, fixa em suas extremidades, e tracionada por uma força de módulo F.



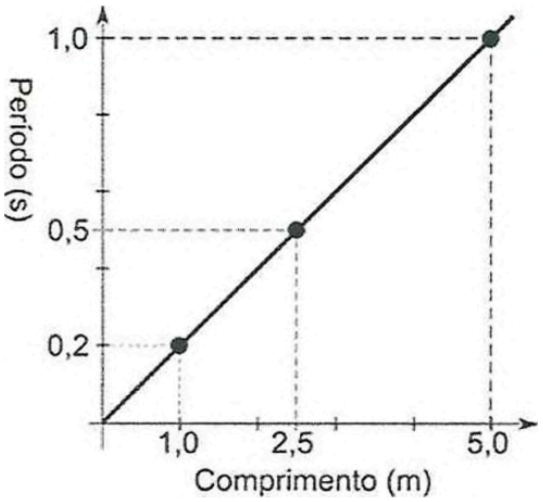
Nessas condições, a mesma razão, entre as frequências $\frac{f_A}{f_B}$, pode ser obtida entre as frequências das ondas estacionárias representadas nos tubos sonoros abertos e idênticos A' e B', indicados na opção



(A) Tubos (a)
(B) Tubos (b)
(C) Tubos (c)
(D) Tubos (d)

29 [Escola Naval 2018]

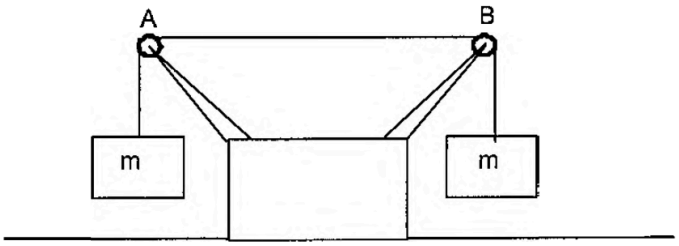
Em uma série de experiências, foi medido, para três valores do comprimento L, o período de oscilação correspondente a meio comprimento de onda estacionária entre as extremidades fixas de uma corda com densidade linear de massa 0,60 kg/m. Os resultados, representados no gráfico (linear) da figura acima, indicam que a tensão na corda, em newtons, em todas as experiências realizadas, foi igual a:



(A) 60
(B) 45
(C) 30
(D) 20
(E) 15

30 [Escola Naval 2019]

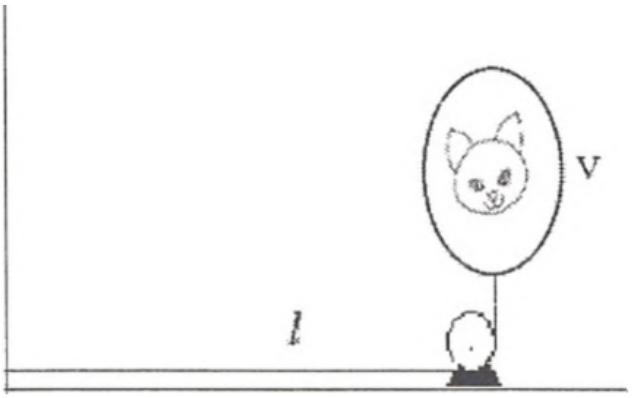
A figura acima mostra uma corda, presa em suas duas extremidades a dois blocos de massa m = 20 kg cada um. Uma fonte sonora que oscila numa frequência angular de 60π rad/s está em ressonância com o trecho AB da corda, de 50 cm, oscilando, assim, em seu segundo harmônico. Observa-se que, na oscilação do trecho AB da corda, não há movimento dos blocos. Qual a massa, em kg, dessa corda que possui 1,0 m de comprimento? Dado: g = 10 m/s².



(A) 1,6
(B) 1,3
(C) 0,9
(D) 0,4
(E) 0,1

31 [EFOMM 2019]

Ana Clara ganhou de seu pai um balão e, para evitar que esse balão, contendo gás hélio e com volume V = 5,0 L, se perdesse voando para a atmosfera, ela pediu a seu pai que utilizasse um cordão de massa m = 10 g e comprimento $l = 1{,}0$ m para amarrá-lo. Para atender ao pedido de sua filha e ao mesmo tempo estudar o fenômeno da propagação de ondas, o pai prendeu a extremidade livre do cordão à parede e utilizou uma polia ideal para montar o experimento (conforme apresentado na figura abaixo). Sabe-se que a massa específica do gás no interior do balão é de 0,17 kg/m³ e a do ar atmosférico é de 1,21 kg/m³. Qual é, então, a velocidade com que uma onda transversal se propaga no cordão do balão de Ana Clara? (Dados: Despreze a massa do revestimento do balão)



(A) 1,41 m/s
(B) 2,28 m/s
(C) 2,83 m/s
(D) 3,32 m/s
(E) 4,00 m/s

32 [Escola Naval 2022]

Uma corda de violão de comprimento L e densidade linear μ é colocada próxima a um alto-falante alimentado por um oscilador de frequência variável. Observa-se que, quando a frequência do oscilador varia continuamente em uma certa faixa de frequências, a corda do violão só oscila apreciavelmente em duas determinadas frequências, f_1 e f_2. Sabendo-se que f_2 é maior do que f_1, a tração a que a corda está submetida é dada pela expressão:

(A) $4L^2(f_2 - f_1)^2\mu$
(B) $2L(f_2 + f_1)\sqrt{\mu}$
(C) $\dfrac{4L^2(f_2 + f_1)^2}{\mu}$
(D) $\dfrac{2L(f_2 - f_1)}{\sqrt{\mu}}$
(E) $2L^2(f_2 - f_1)^2\mu^2$

33 [EFOMM 2017]

Uma corda ideal está atada a um diapasão que vibra com frequência f_1 e presa a um corpo de massa m = 2,5 kg, conforme a figura 1. A onda estacionária que se forma possui 6 ventres que formam 3,0 m de comprimento.

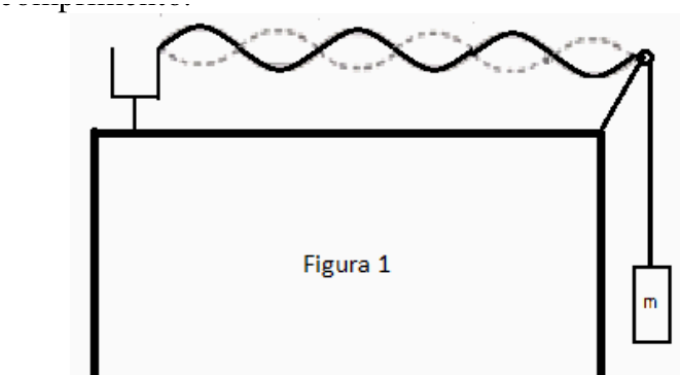


Figura 1

Um diapasão de frequência f_2 é posto a vibrar na borda de um tubo com água, conforme a figura 2.

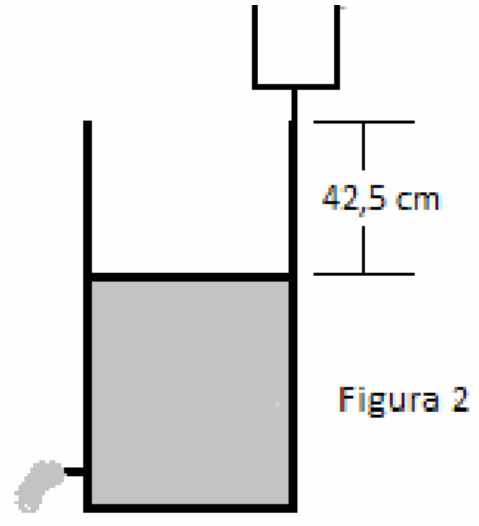


Figura 2

O nível da água vai diminuindo e, na altura de 42,5 cm, ocorre o primeiro aumento da intensidade sonora. Desprezando os atritos e considerando a roldana ideal, a razão entre as frequências f_2 e f_1 é de aproximadamente: Dado: densidade linear da corda = 250 g/m.

(A) $2{,}0$
(B) $4{,}0$
(C) $20{,}0$
(D) $40{,}0$
(E) $60{,}0$

34 [EFOMM 2018]

Para ferver três litros de água para fazer uma sopa, Dona Marize mantém uma panela de 500 g suspensa sobre a fogueira, presa em um galho de árvore por um fio de aço com 2 m de comprimento. Durante o processo de aquecimento, são gerados pulsos de 100 Hz em uma das extremidades do fio. Esse processo é interrompido com a observação de um regime estacionário de terceiro harmônico. Determine, aproximadamente, a massa de água restante na panela. (Dados: densidade linear do aço = 10^{-3} kg/m; aceleração da gravidade = 10 m/s² e densidade da água = 1 kg/L.)

(A) 1,28 kg
(B) 1,58 kg
(C) 2,28 kg
(D) 2,58 kg
(E) 2,98 kg

35 [Escola Naval 2021]

Artur, um musicista, possui em seu baixo uma corda, com densidade linear de $4{,}0 \times 10^{-5}$ kg/m, afinada em SOL ($f_{SOL} = 392$ Hz), ou seja, foi tracionada de maneira que a frequência fundamental de vibração da corda, ou primeiro harmônico, seja 392 Hz. Artur sabe que ao pressionar a corda no braço do baixo a 10 cm de sua extremidade, esta passa a emitir um som de LÁ ($f_{LÁ} = 440$ Hz), ou seja, passa a vibrar com uma frequência fundamental de 440 Hz. Artur vai colocar uma nova corda no baixo, idêntica à anterior. De acordo com os dados, calcule, aproximadamente, que tração ele deve aplicar à nova corda para que esta fique afinada em LÁ e assinale a opção correta.

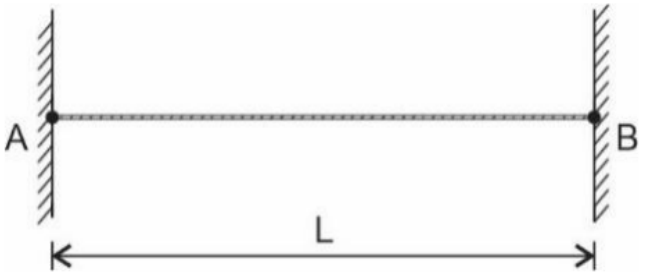
(A) 12 N
(B) 19 N
(C) 22 N
(D) 26 N
(E) 32 N

36 [AFA 2024]

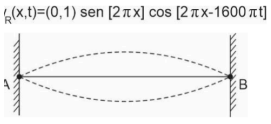
Duas ondas periódicas harmônicas dadas pelas equações de onda y_1 e y_2, em unidades do sistema internacional, apresentadas abaixo, propagam-se em uma corda homogênea de comprimento L = 1 m.

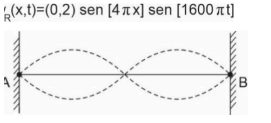
$$y_1(x,t) = -(0{,}10)\cos[2\pi x + 1600\pi t] \qquad y_2(x,t) = +(0{,}10)\cos[2\pi x - 1600\pi t]$$

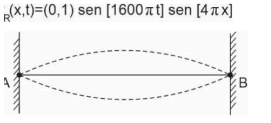
A corda possui duas extremidades fixas em paredes rígidas nos pontos A e B de acordo com o diagrama abaixo.

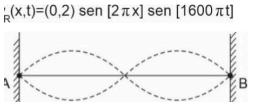


A superposição dessas ondas estabelece o fenômeno de interferência conhecido como ondas estacionárias. Considere que a velocidade de propagação das ondas na corda seja constante e que não ocorra nenhum tipo de dissipação energética no sistema. Nessas condições, a equação da onda estacionária resultante na corda, $y_R(x,t)$, e a representação do respectivo harmônico estabelecido são melhor apresentadas na opção





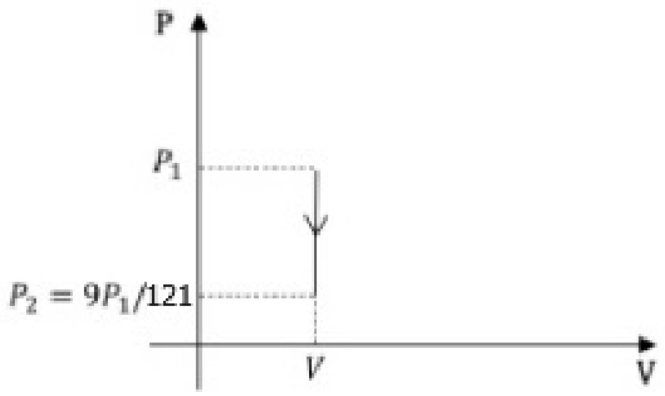




(A) Opção (a)
(B) Opção (b)
(C) Opção (c)
(D) Opção (d)

37 [EFOMM 2025]

Um tubo de comprimento L que está em contato térmico com o meio externo contém n mols de um certo gás ideal. Ambas as extremidades do tubo possuem membranas impermeáveis e flexíveis, de forma que elas podem oscilar devido à ação de uma fonte externa, que induz a propagação de ondas sonoras de frequência f dentro do tubo. Num certo instante t_1, o gás está a uma temperatura T_1 e forma-se dentro do tubo uma onda estacionária de número harmônico n_1. À medida que o gás troca calor com o meio externo, essa onda estacionária se desfaz; porém, em um instante posterior t_2, uma outra onda estacionária de número harmônico n_2 é observada. O gráfico P-V do gás entre os instantes t_1 e t_2 está apresentado na figura abaixo, em que P_1 e P_2 são as pressões do gás nos instantes t_1 e t_2, respectivamente. Assinale a alternativa que corresponde à razão n_2/n_1.



Dados: velocidade de propagação de uma onda sonora no gás: $v^2 = \gamma RT/M$, em que M é a massa molar do gás, R é a constante universal dos gases, γ é a razão C_P/C_V e T é a temperatura do gás, todos em unidades do SI. Permanecem constantes entre os instantes t_1 e t_2: o volume ocupado pelo gás (que é o próprio volume do tubo (V)); a frequência f da fonte externa; e o número de mols do gás dentro do tubo.

(A) 1
(B) $11/3$
(C) $\sqrt{11}/3$
(D) $3\sqrt{11}/11$
(E) $9/11$

5. GABARITO COMENTADO

Exercícios propostos

Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.
01	B	04	C	06	E	09	D
11	C	13	B	16	E	20	D

▼ **Nível 1 (01 a 06)**

01 (B). Dois nós consecutivos estão separados por meio comprimento de onda: $\frac{60}{2} = 30$ cm.

02. (a) No fundamental $\lambda = 2L = 1{,}30$ m e $v = \lambda f = 1{,}30 \cdot 196 \approx 255$ m/s. (b) $f_2 = 2 \cdot 196 = 392$ Hz e $f_3 = 3 \cdot 196 = 588$ Hz. (c) No ar a frequência é a mesma, mas a velocidade é a do som: $\lambda_{ar} = \frac{343}{196} = 1{,}75$ m, maior que o comprimento de onda na corda ($1{,}30$ m).

03. A figura mostra 3 fusos: $L = 3 \cdot \frac{\lambda}{2}$, então $\lambda = \frac{2 \cdot 1{,}5}{3} = 1{,}0$ m e $f = \frac{v}{\lambda} = 60$ Hz. É o 3º harmônico; a fundamental é $f_1 = \frac{60}{3} = 20$ Hz (ou $\frac{v}{2L} = \frac{60}{3{,}0}$).

04 (C). Num tubo fechado só existem os harmônicos ímpares: 120, $3 \cdot 120 = 360$, $5 \cdot 120 = 600$ Hz, … As listas A e E contêm frequências menores que a fundamental ou que não são múltiplos ímpares de 120 Hz; B e D contêm múltiplos pares (240, 480, 720 Hz).

05. (a) $\mu = \frac{0{,}020}{2{,}0} = 0{,}010$ kg/m (massa e comprimento da corda inteira, não só do trecho horizontal). (b) A tração é o peso do bloco, $F = 25$ N: $v = \sqrt{\frac{25}{0{,}010}} = 50$ m/s. (c) O trecho horizontal está fixo na parede e na polia: $f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{50}{2{,}0} = 25$ Hz.

06 (E). $f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ cresce quando L diminui. Diminuir F ou aumentar μ (corda mais grossa) ou L abaixa a nota. Tocar com mais força aumenta a amplitude (o som fica mais intenso), mas não muda a frequência.

▼ **Nível 2 (07 a 12)**

07. (a) Aberto: $f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{340}{1{,}0} = 340$ Hz; todos os harmônicos: 340, 680 e $1\,020$ Hz. (b) Fechado: $f_1 = \frac{v}{4L} = \frac{340}{2{,}0} = 170$ Hz; só ímpares: 170, 510 e 850 Hz.

08. $\mu = \rho A = 8{,}9 \times 10^{3} \cdot 1{,}0 \times 10^{-6} = 8{,}9 \times 10^{-3}$ kg/m. $v = \sqrt{\frac{89}{8{,}9 \times 10^{-3}}} = \sqrt{10^4} = 100$ m/s. $f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{100}{1{,}0} = 100$ Hz.

09 (D). A coluna de ar é um tubo fechado pela água; ressonâncias consecutivas diferem de $\lambda/2$: $\frac{\lambda}{2} = 50 - 16 = 34$ cm, $\lambda = 0{,}68$ m e $f = \frac{340}{0{,}68} = 500$ Hz. A primeira ressonância deveria ocorrer em $\lambda/4 = 17$ cm; o valor medido, 16 cm, mostra uma correção de extremidade de 1 cm, que não afeta o resultado porque foi usada a diferença.

10. (a) $\Delta f = 420 - 300 = 120$ Hz e $\dfrac{300}{120} = 2{,}5$, que não é inteiro: tubo **fechado**. (b) $2f_1 = 120$ Hz, então $f_1 = 60$ Hz. (c) $L = \dfrac{v}{4f_1} = \dfrac{336}{240} = 1{,}4$ m. (d) $\dfrac{300}{60} = 5$ e $\dfrac{420}{60} = 7$: 5º e 7º harmônicos.

11 (C). A tração e a corda são as mesmas, então v não muda e $f_1 \propto \dfrac{1}{L}$. O trecho maior mede 75 cm: $f = 120 \cdot \dfrac{100}{75} = 160$ Hz. (O trecho menor, de 25 cm, teria 480 Hz.)

12. $f_1 = \dfrac{v}{4L} = \dfrac{340}{1{,}0} = 340$ Hz; os harmônicos possíveis são 340, $1\,020$, $1\,700$ Hz, ... Na faixa de 200 Hz a $1\,500$ Hz: **340 Hz e $1\,020$ Hz**. Não há ressonância em 680 Hz, pois o tubo fechado não tem harmônicos pares.

▼ Nível 3 (13 a 17)

13 (B). A figura mostra 4 fusos em $1{,}6$ m: $\lambda = \dfrac{2 \cdot 1{,}6}{4} = 0{,}80$ m. $v = \lambda f = 0{,}80 \cdot 75 = 60$ m/s. $F = \mu v^2 = 2{,}5 \times 10^{-3} \cdot 3\,600 = 9{,}0$ N.

14. (a) $f_1 = \dfrac{v}{2L} = \dfrac{340}{1{,}70} = 200$ Hz. (b) $T_1 = 300$ K e $T_2 = 363$ K: $\dfrac{v_2}{v_1} = \sqrt{\dfrac{363}{300}} = \sqrt{1{,}21} = 1{,}1$, então $v_2 = 374$ m/s e $f_1' = 1{,}1 \cdot 200 = 220$ Hz. (c) Não. O comprimento de onda do fundamental é fixado pelo tubo, $\lambda_1 = 2L = 1{,}70$ m, nas duas temperaturas; o que aumentou foi a velocidade e, com ela, a frequência.

15. (a) Os picos estão em 420 Hz e 490 Hz, sem outro entre eles; na corda presa nas duas pontas todos os harmônicos existem, então a diferença é a fundamental: $f_1 = 70$ Hz. Como $\dfrac{420}{70} = 6$ e $\dfrac{490}{70} = 7$, são o 6º e o 7º harmônicos. (b) $v = 2Lf_1 = 2 \cdot 0{,}70 \cdot 70 = 98$ m/s. (c) $F = \mu v^2 = 5{,}0 \times 10^{-3} \cdot 98^2 \approx 48$ N.

16 (E). Tubo A (aberto): ressonâncias $f_1, 2f_1, \ldots$ com $f_1 = \dfrac{v}{2L}$; a segunda é $2 \cdot \dfrac{v}{2L} = \dfrac{v}{L}$. Tubo B (fechado): ressonâncias $\dfrac{v}{4L}, \dfrac{3v}{4L}, \ldots$; a segunda é o 3º harmônico, $\dfrac{3v}{4L}$. Razão: $\dfrac{v/L}{3v/(4L)} = \dfrac{4}{3}$. O erro comum é tomar a segunda ressonância do tubo fechado como $2 \cdot \dfrac{v}{4L}$, harmônico que não existe nesse tubo.

17. (a) $v = \sqrt{\dfrac{115{,}2}{2{,}0 \times 10^{-3}}} = \sqrt{57\,600} = 240$ m/s; $f = \dfrac{v}{2L} = \dfrac{240}{0{,}80} = 300$ Hz. (b) Na corda, $\lambda = 2L = 0{,}80$ m; no ar, $\lambda_{ar} = \dfrac{340}{300} \approx 1{,}13$ m. (c) O tubo fechado ressoa quando f coincide com um de seus harmônicos; o menor comprimento corresponde ao fundamental: $x = \dfrac{\lambda_{ar}}{4} = \dfrac{340}{4 \cdot 300} \approx 0{,}283$ m ≈ 28 cm. (d) Tubo aberto: $L = \dfrac{\lambda_{ar}}{2} \approx 0{,}567$ m ≈ 57 cm. Usar o comprimento de onda da corda ($0{,}80$ m) no tubo daria $x = 20$ cm, resultado errado.

▼ Nível ITA/IME (18 a 21)

18. (a) O comprimento vibrante, o modo e a corda não mudam, então $f \propto \sqrt{F}$: $\dfrac{F_{água}}{F_{ar}} = \left(\dfrac{250}{300}\right)^2 = \dfrac{25}{36}$. No ar $F_{ar} = P = \rho_b V g$; na água $F_{água} = P - E = (\rho_b - \rho_a) V g$. Então $\dfrac{\rho_b - \rho_a}{\rho_b} = \dfrac{25}{36}$, isto é, $1 - \dfrac{\rho_a}{\rho_b} = \dfrac{25}{36}$, e $\rho_b = \dfrac{36}{11}\rho_a \approx 3{,}27$ g/cm³. (b) $\dfrac{F_{óleo}}{F_{ar}} = 1 - \dfrac{0{,}80}{36/11} = 1 - \dfrac{8{,}8}{36} \approx 0{,}756$; $f = 300\sqrt{0{,}756} \approx 261$ Hz.

19. (a) Na parede, nó (extremidade fixa); no anel, ventre (extremidade livre: o anel sobe e desce sem resistência). (b) Entre um nó e um ventre cabe um número ímpar de quartos de onda: $L = n\dfrac{\lambda}{4}$, $n = 1, 3, 5, \ldots$ Então $\lambda_n = \dfrac{4L}{n} = \dfrac{4{,}0}{n}$ m ($4{,}0$ m; $1{,}33$ m; $0{,}80$ m; ...) e $f_n = n\dfrac{v}{4L} = 20\,n$ Hz: 20, 60 e 100 Hz. (c) Tubo fechado em uma extremidade (nó numa ponta, ventre na outra, só harmônicos ímpares). (d) O terceiro modo é $n = 5$, com $\lambda = 0{,}80$ m. Os nós estão a cada $\lambda/2 = 0{,}40$ m a partir da parede: $x = 0$; $0{,}40$ m e $0{,}80$ m (3 nós); o anel ($x = 1{,}0$ m) está a $\lambda/4$ do último nó, num ventre.

20 (D). Cada ressonância seguinte exige uma coluna de ar $\lambda/2$ mais longa: $\lambda = \dfrac{340}{425} = 0{,}80$ m e $\Delta h = 0{,}40$ m $= 40$ cm. O nível baixa com velocidade $\dfrac{Q}{A} = \dfrac{40\ \text{cm}^3/\text{s}}{20\ \text{cm}^2} = 2{,}0$ cm/s. Então $\Delta t = \dfrac{40}{2{,}0} = 20$ s. (A primeira ressonância, com $h = \lambda/4 = 20$ cm, ocorre 10 s após a abertura da torneira.)

21. (a) $\Delta f = 1\,000$ Hz e $\dfrac{2\,500}{1\,000} = 2{,}5$: só harmônicos ímpares, tubo **fechado**, com $2f_1 = 1\,000$ Hz e $f_1 = 500$ Hz. (b) $v = 4Lf_1 = 4 \cdot 0{,}50 \cdot 500 = 1\,000$ m/s; $\dfrac{2\,500}{500} = 5$ e $\dfrac{3\,500}{500} = 7$: 5º e 7º harmônicos. (c) $M = \dfrac{\gamma RT}{v^2} = \dfrac{(5/3) \cdot 8{,}3 \cdot 300}{10^6} \approx 4{,}2 \times 10^{-3}$ kg/mol ≈ 4 g/mol: é o **hélio**.

Questões oficiais

Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.	Q	Resp.
22	B	23	D	24	D	25	D
26	C	27	E	28	D	29	A
30	C	31	B	32	A	33	C
34	A	35	D	36	D	37	B

▼ **22 a 37 – Questões oficiais**

22 (B) · EsPCEx 2022.

$$L = 3 \cdot \frac{\lambda}{2} \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{2 \cdot 15{,}6}{3} = 10{,}4\ \text{m}$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{2{,}6}{10{,}4} = 0{,}25\ \text{Hz}$$

23 (D) · EFOMM 2016.

A coluna de ar é um tubo fechado (pela água). A primeira ressonância ocorre com $h = \frac{\lambda}{4}$:

$$\lambda = \frac{320}{400} = 0{,}80\ \text{m} \;\Rightarrow\; h = 0{,}20\ \text{m} = 20\ \text{cm}$$

24 (D) · Escola Naval 2020.

No modo fundamental, $f = \frac{v}{2l}$ com $v = \sqrt{T/\mu}$: a frequência é proporcional à raiz da tração. Tração quatro vezes maior, frequência duas vezes maior:

$$f' = 2 \cdot 200 = 400\ \text{Hz}$$

25 (D) · Escola Naval 2021.

$$f_n = \frac{n\,v}{4L} = n \cdot 170\ \text{Hz}, \quad n \text{ ímpar}: \ 170,\ 510,\ 850,\ 1190\ \text{Hz}$$

Na faixa de 600 Hz a 1000 Hz, só 850 Hz.

26 (C) · EFOMM 2023.

$$f_3 = \frac{3v}{2L} = 600 \;\Rightarrow\; \frac{v}{2L} = 200, \qquad \frac{v}{2L'} = 800$$

A tração não mudou, então v é a mesma: $\frac{L'}{L} = \frac{200}{800} = \frac{1}{4}$.

27 (E) · EFOMM 2018.

$$T = P - E = 0{,}5 \cdot 10 - 1000 \cdot 10^{-4} \cdot 10 = 5 - 1 = 4\ \text{N}$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{4}{1{,}2 \times 10^{-3}}} \approx 57{,}7\ \text{m/s}$$

28 (D) · AFA 2019.

Na corda, A tem 2 fusos e B tem 3: $\frac{f_A}{f_B} = \frac{2}{3}$.

No tubo aberto, o n-ésimo harmônico tem n nós. Contando os nós: a) 2 e 4; b) 1 e 2; c) 1 e 3; d) 2 e 3. Só d dá $\frac{2}{3}$.

29 (A) · Escola Naval 2018.

Meio comprimento de onda entre as extremidades: $\lambda = 2L$ e $T = \frac{\lambda}{v} = \frac{2L}{v}$. Pelo gráfico, $T = 0{,}2L$:

$$\frac{2}{v} = 0{,}2 \ \Rightarrow\ v = 10\ \text{m/s} \qquad F = \mu v^2 = 0{,}60 \cdot 100 = 60\ \text{N}$$

30 (C) · Escola Naval 2019.

Segundo harmônico em 0,50 m: $\lambda = 0{,}50$ m. Frequência $f = \frac{60\pi}{2\pi} = 30$ Hz, então $v = \lambda f = 15$ m/s.

Os blocos parados sustentam a corda: a tração vale $mg = 200$ N.

$$\mu = \frac{T}{v^2} = \frac{200}{225} \approx 0{,}89\ \text{kg/m} \ \Rightarrow\ \text{massa de } 1{,}0\ \text{m} \approx 0{,}9\ \text{kg}$$

31 (B) · EFOMM 2019.

A tração é o empuxo menos o peso do hélio:

$$T = (1{,}21 - 0{,}17) \cdot 5{,}0 \times 10^{-3} \cdot 10 = 0{,}052\ \text{N}, \qquad \mu = \frac{0{,}010}{1{,}0} = 0{,}010\ \text{kg/m}$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{5{,}2} \approx 2{,}28\ \text{m/s}$$

32 (A) · Escola Naval 2022.

São dois harmônicos consecutivos: a diferença é a frequência fundamental, $f_2 - f_1 = \frac{v}{2L}$.

$$v = 2L(f_2 - f_1) \qquad T = \mu v^2 = 4L^2(f_2 - f_1)^2\mu$$

33 (C) · EFOMM 2017.

Corda: 6 ventres em 3,0 m, então $\lambda = 1{,}0\,\text{m}$. Com $T = 25\,\text{N}$: $v = \sqrt{\frac{25}{0{,}25}} = 10\,\text{m/s}$ e $f_1 = 10\,\text{Hz}$.

Tubo (fechado pela água): a primeira ressonância ocorre com $\frac{\lambda}{4} = 0{,}425\,\text{m}$, logo $\lambda = 1{,}7\,\text{m}$ e, com o som a $340\,\text{m/s}$, $f_2 = 200\,\text{Hz}$.

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{200}{10} = 20$$

34 (A) · EFOMM 2018.

$$f_3 = \frac{3v}{2L} \ \Rightarrow\ v = \frac{2 \cdot 2 \cdot 100}{3} = \frac{400}{3}\ \text{m/s}$$

$$T = \mu v^2 = 10^{-3} \cdot \frac{160\,000}{9} \approx 17{,}8\ \text{N} \ \Rightarrow\ m_{total} \approx 1{,}78\ \text{kg}$$

Descontando a panela (0,5 kg), restam cerca de 1,28 kg de água.

35 (D) · Escola Naval 2021.

Com a mesma tração, $f \propto \frac{1}{L}$: $L - 0{,}1 = L \cdot \frac{392}{440}$, logo $L = \frac{0{,}1 \cdot 440}{48} \approx 0{,}917$ m.

$$T = \mu(2Lf)^2 = 4 \cdot 10^{-5} \cdot (2 \cdot 0{,}917 \cdot 440)^2 \approx 26\ \text{N}$$

36 (D) · AFA 2024.

$$y_R = 0{,}1\,[\cos(2\pi x - \omega t) - \cos(2\pi x + \omega t)] = 0{,}2\,\text{sen}(2\pi x)\,\text{sen}(1600\pi t)$$

Com $k = 2\pi$, $\lambda = 1$ m $= L$: dois fusos, com nó no meio (2º harmônico). É a opção (d).

37 (B) · EFOMM 2025.

A volume constante, $P \propto T$: $\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{9}{121}$, logo $\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{9}{121}} = \frac{3}{11}$.

Com a frequência e o comprimento fixos, $f = \frac{n\,v}{2L}$ dá $n \propto \frac{1}{v}$:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{11}{3}$$